5. Stanovení tíhového zrychlení reverzním kyvadlem a studium gravitačního pole

5.1. Zadání úlohy

1. Určete velikost tíhového zrychlení pro Prahu reverzním kyvadlem.
2. Stanovte chybu měření tíhového zrychlení.
3. Proveďte korekci výsledné hodnoty doby kyvu pro reverzní kyvadlo τ_0 pomocí vztahu v sekci 5.4.4 a porovnejte korigovanou hodnotu s naměřenou.
4. Vypracujte graf závislosti τ_{0d} a $\tau_0 h$ na poloze čočky.

5.2. Teoretický rozbor

Spojujeme-li naši kartézskou soustavu souřadnic se zemským povrchem, považujeme ji v prvním přiblížení za inerciální. Je však známo, že Země rotuje a obíhá kolem Slunce. Je-li vztažná soustava spojená se Sluncem a stálicemi inerciální, pak soustava spojená se Zemí inerciální nebude. To ovšem nevadí, pokud si budeme vědomi a jsme připraveni možné efekty, které neinerciálnost vztažné soustavy může způsobit. Lze říci, že můžeme používat i neinerciální soustavu, ale musíme do ní zavést další síly setrvačné, aby výsledek našich výpočtů souhlasil s pozorovanými jevy. Jestliže počátek soustavy souřadnic ztotožníme se středem Země a osy pevně spojíme s rotující Zemí, pak zjednodušená pohybová rovnice částice o hmotnosti m má na povrchu Země následující tvar:

$$m\vec{a}' = m\vec{a}_g - m\vec{A} - m\vec{\epsilon} \times \vec{r} - m\vec{\omega}_Z \times (\vec{\omega}_Z \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega}_Z \times \vec{v}'$$

První člen na pravé straně představuje jedinou pravou sílu působící na částici – gravitační působení Země. Neuvažujeme-li působení jiných těles, je pak možné přímo psát, že

$$\vec{a}_g = \kappa \frac{M_z}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

kde r je vzdálenost od středu země a vektor $\vec{r}$ je odpovídající polohový vektor. Velikost gravitačního zrychlení je pak rovna

$$a_g = \kappa \frac{M_z}{(R_z + h)^2},$$

kde R_z je poloměr Země a h výška nad zemským povrchem. Vyšetřujeme-li pohyb jen v rámci malého prostoru, lze gravitační pole považovat za homogenní. Druhý člen představuje sílu odstředivou, která působí kolmo od zemské osy. Pro velikost odstředivého zrychlení na povrchu platí vztah

$$a_{od} = R_z \omega_z^2 \cos \alpha'$$

Toto zrychlení se vektorově sčítá se zrychlením gravitačním a v daném místě můžeme tíhové pole považovat opět za homogenní. Uvážíme-li, že na pólech nepůsobí odstředivá síla, je tíhové zrychlení g_{90} největší

$$g_\alpha = g_{90} - \omega^2 R_z \cos^2 \alpha = (9{,}83217 - 0{,}034 \cos^2 \alpha)\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Poslední síla vystupující ve výše uvedené rovnici je *síla Coriolisova*. Vzhledem k tomu, že námi uvažované rychlosti budou dostatečně malé, můžeme Coriolosovu sílu opět zanedbat.

K určení tíhového zrychlení lze využít například fyzického kyvadla. Pro naše úvahy však bude lépe definovati matematické kyvadlo (a poté ukázat analogii mezi kyvadlem fyzickým a matematickým).

Za *matematické kyvadlo* lze považovat hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na tuhém nehmotném závěsu délky l. Moment setrvačnosti takového kyvadla je $J = ml^2$. Dobu kyvu tohoto kyvadla lze odvodit jako

$$\tau_0 = \pi\sqrt{\frac{ml^2}{mlg}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Srovnal-li by se uvedený výraz z obdobným výrazem pro fyzické kyvadlo, lze pozorovat analogii mezi délkou matematického kyvadla a redukovanou délkou $L = J/md$ kyvadla fyzického. *Redukovaná délka fyzického kyvadla* se rovná délce matematického kyvadla, které má stejnou doby kyvu jako kyvadlo fyzické. Dle Steinerovy věty platí, že $J = J_0 + md^2$. Dobu kyvu lze tedy určit jako

$$\tau_0^2 = \pi^2(J_0 + md^2)/mdg$$

Z této funkce je patrno, že existuje poloha os na každé straně od těžiště, pro které vychází stejná doba kyvu. Najdeme-li nesymetrickou polohu těchto os, je jejich vzdálenost rovna redukované délce kyvadla. Tíhové zrychlení se pak určí jako

$$g = \frac{\pi^2 L}{\tau_0^2}$$

5.3. Postup měření

1. Zapněte čítač kyvů se stopkami síťovým přepínačem a druhý přepínač přepněte do polohy „START“.

2. Zavěste kyvadlo v poloze s čočkou dole nastavenou na nejkratší možnou vzdálenost od břitu. Kyvadlo vychylte z rovnovážné polohy k levému dorazu (aniž by se jej však dotýkalo) a pusťte jej.

3. Následovně stiskněte tlačítko „NULOVÁNÍ“. Čítač kyvů se vynuluje a od prvního průchodu rovnovážnou polohou začne měřit čas a počítat kyvy. Při každém stém kyvu zůstane na displeji času zobrazen čas stejného kyvu po dobu asi 5 s.

4. Odečtěte čas. Kyvadlo zavěste v poloze s čočkou nahoře a měření opakujte.

5. Zvětšete vzdálenost čočky od břitu o jednu otáčku a opakujte měření. Závislost doby kyvu na vzdálenosti poloze čočky.

6. V měření pokračujte do té doby, dokud se obě křivky neprotnou.

7. Nachází-li se čočka v poloze, která odpovídá průsečíku obou křivek, pak proveďte ještě jednou měření doby kyvu z 500 kyvů podle obou os.

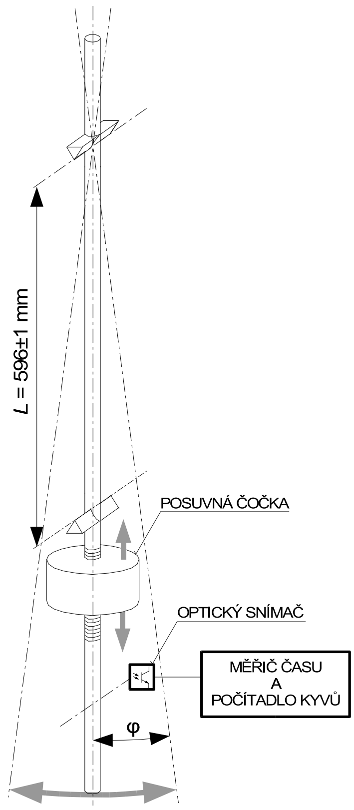
8. Určete střední hodnotu z τ_{0h} a τ_{0d} a pro ní vypočítejte hodnotu tíhového zrychlení.

9. Odhadněte přesnost měření času a přesnost určení vzdálenosti břitů reverzního kyvadla a z těchto hodnot vypočítejte přesnost měření.

10. Získané hodnoty porovnejte s tabulkovou hodnotou pro Prahu.

5.3.1. Použité měřící přístroje

- Čítač impulzů FELFYZ PRAHA
- reverzní kyvadlo $L = (0{,}596 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m}$



Obrázek 1: Schéma měřícího zařízení

5.4. Naměřené hodnoty

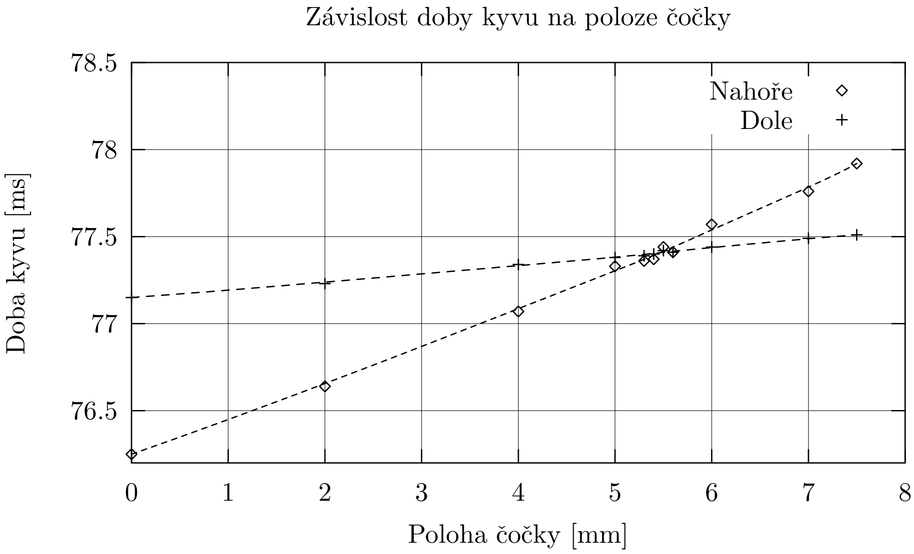
5.4.1. Hodnoty pro 100 kyvů

d [mm]	τ_{0d} [ms]	τ_{0h} [ms]	d [mm]	τ_{0d} [ms]	τ_{0h} [ms]
0,0	7715	7625	5,5	7742	7744
2,0	7723	7664	5,6	7741	7741
4,0	7734	7707	6,0	7744	7757
5,0	7738	7733	7,0	7749	7776
5,3	7739	7736	7,5	7751	7792
5,4	7740	7737			

5.4.2. Hodnoty pro 500 kyvů

Hodnoty měřené při vzdálenosti čočky $d = 5{,}6\,\mathrm{mm}$.

- Při čočce nahoře jsme naměřili $\tau_{0h} = 38712\,\mathrm{ms}$
- Při čočce dole jsme naměřili $\tau_{0d} = 38703\,\mathrm{ms}$



5.4.3. Určení velikosti tíhového zrychlení

Pro dobu kyvu fyzického kyvadla platí:

$$\tau_0 = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = \frac{\pi^2 L}{\tau_0^2}$$

$$g = \frac{\pi^2 L}{\left(\frac{1}{n}\frac{\tau_{0d}+\tau_{0h}}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 0{,}596}{\left(\frac{387{,}075}{500}\right)^2} = 9{,}81512\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

5.4.4. Korekce výsledné hodnoty

Pohybová rovnice našeho kyvadla je zadána rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{mgd}{J}\sin\varphi = 0 \quad ,$$

řešením této nelineární diferenciální rovnice je obecně dáno *eliptickým integrálem*, který po rozvinutí v řadu dává vztah pro dobu kyvu τ_{φ_m} při amplitudě rozkyvu φ_m (pro $\varphi = 5°$ se dopouštíme chyby asi 0,05 %) následující vztah

$$\tau_{\varphi_m} = \tau_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi_m}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_m}{2} + \ldots\right] = \frac{378{,}075}{500}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{5°}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\sin^4\frac{5°}{2}\right] = 0{,}77415\,\mathrm{ms}$$

Výpočet tíhového zrychlení pro korigovanou hodnotu doby kyvu:

$$g = \frac{\pi^2 L}{(\tau_{\varphi_m})^2} = \frac{\pi^2\cdot 0{,}596}{(0{,}77415)^2} = 9{,}81512\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

5.4.5. Chyba měření

Chyba měření je dána tolerancí délky reverzního kyvadla, která činní $L = (0{,}596 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m}$. Tíhové zrychlení g pro naši dobu kyvu τ se tedy může měnit v intervalu $\langle 9{,}7986;\ 9{,}83159\rangle$, takže odhad pravděpodobné chyby měření je 0,34 %.

5.5. Závěr

Stanovené tíhové zrychlení je $g = (9{,}815 \pm 0{,}033)\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Tato hodnota se od hodnoty, na adrese Karlovo náměstí 13, Praha, která činní $g_n = 9,81040\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ liší o méně než 0,05 %.

5.6. Kontrolní otázky

1. Jak závisí tíhové zrychlení na zeměpisné šířce?

   Vzhledem k tomu, že na tíhové zrychlení má vliv i odstředivá síla působící v daném místě na povrchu Země, tíhové zrychlení mírně roste od pólů směrem k rovníku, kde má nejvyšší hodnotu.

2. Závisí tíhové zrychlení rovněž na zeměpisné délce?

   Nezávisí. Předpokládáme-li, že dvě místa se různou zeměpisnou šířkou mají různou zeměpisnou délku, pak ve shodné nadmořské výšce je i shodné tíhové zrychlení.

3. Jedná se v případě fyzického kyvadla o pohyb čistě harmonický?

   V případě fyzického kyvadla dochází ke ztrátám energie vlivem např. nenulového tření v závěsu, a proto dochází ke tlumení harmonického pohybu fyzického kyvadla.

4. Pro jakou zeměpisnou šířku je tíhové zrychlení minimální?

   Tíhové zrychlení je minimální v místech, kde je největší příspěvek odstředivé síly, tj. na rovníku.

5. Jak zní Steinerova věta?

   Moment setrvačnosti tělesa J k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti hmotného bodu v těžišti, jehož hmotnost m je rovna hmotnosti tělesa, zvětšeném o moment setrvačnosti J_0 tělesa vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm $J = J_0 + md^2$.

6. Jak definujeme redukovanou délku fyzikálního kyvadla?

   Je to taková délka fyzického kyvadla, které má stejnou dobu kmitu jako dané matematické kyvadlo (pro netlumené kmity):

   $$\tau_0 = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

7. Jaké síly, kromě gravitační, působí na těleso v soustavě spojené se Zemí?

   Je to zejména síla odstředivá a síla Coriolosova. Dále také síla setrvačná způsobená nerovnoměrností translačního pohyby Země a síla Eulerova způsobená změnou úhlové rychlosti Země. Avšak vliv zejména posledních dvou sil je velmi malý a tudíž zanedbatelný.