str. 138, př. 13

Jsou dány vektory **a,b,c,u,v** vektorového prostoru R^4. Nechť M je lineární obal vektorů a,b,c a V je lin. Obal vektorů u,v. Najděte dimenze těchto vektorových podprostorů $M, V, M+V, M \cap V$.

$$\vec{a}=(1,1,1,0), \vec{b}=(2,1,0,1), \vec{c}=(3,2,2,1), \vec{u}=(0,0,-1,3), \vec{v}=(2,1,1,1)$$

$$M=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\2&1&0&1\\3&2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-2&1\\0&-1&-10&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-2&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow hod=3=\dim$$

$$V=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\0&0&-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow hod=2=\dim$$

$$M+V=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\2&1&0&1\\3&2&2&1\\2&1&1&1\\0&0&-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-2&1\\0&-1&-1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-2&1\\0&-1&-1&1\\0&0&-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow hod=4=\dim$$

$$\dim M+\dim V=\dim(M+V)+\dim(M\cap V)$$

$$\dim(M\cap V)=\dim M+\dim V-\dim(M+V)$$

$$\dim(M\cap V)=3+2-4=1$$

$$\dim M=3, \dim V=2, \dim(M+V)=4, \dim(M\cap V)=1.$$

str. 138, př. 23

$E=(e_1,e_2,e_3)$ je uspořádaná báze, vzhledem ke které má vektor $x=(x_1,x_2,x_3)$. Určete souřadnice tohoto vektoru vzhledem k uspořádané bázi $F=(2e_1+e_2+2e_3, e_1-e_2+e_3, 3e_1+3e_2+e_3)$. Ověřte, že F je skut. báze.

$$F=(f_1,f_2,f_3)=(2e_1+e_2+2e_3, e_1-e_2+e_3, 3e_1+3e_2+e_3)$$

$$f_1=2e_1+e_2+2e_3$$

$$f_2=e_1-e_2+e_3$$

$$f_3=3e_1+2e_2+e_3$$

$$\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-1&1\\3&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&3&0\\0&5&-2\end{bmatrix}\Rightarrow hod=2\Rightarrow báze$$

$$12\vec{e_1}+9\vec{e_2}+6\vec{e_3}=x=y_1f_1+y_2f_2+y_3f_3=$$

$$=y_1(2e_1+e_2+2e_3)+y_2(e_1-e_2+e_3)+y_3(3e_1+2e_2+e_3)=$$

$$=\vec{e_1}(2y_1+y_2+3y_3)+\vec{e_2}(y_1-y_2+2y_3)+\vec{e_3}(2y_1+y_2+y_3)$$

$$12=2y_1+y_2+3y_3$$

$$9=y_1-y_2+2y_3$$

$$6=2y_1+y_2+y_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&12\\1&-1&2&9\\2&1&1&6\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&9\\2&1&3&12\\2&1&1&6\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&9\\0&3&-1&-6\\0&3&-3&-12\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&9\\0&3&-1&-6\\0&0&-2&-6\end{array}\right]$$

$-2y_3 = -6$ $\quad$ $3y_2 - y_3 = -6$ $\quad$ $y_1 - y_2 + 2y_3 = 9$

$y_3 = 3$ $\quad$ $y_2 = -1$ $\quad$ $y_1 = 2$

$\vec{x} = (2, -1, 3)$ vzhledem k F.

str. 138, př. 24

Nalezněte souřadnice polynomu P(x) v uspořádané bázi B.

$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x - 3$

$B = \left(3, x+2, (x+1)^2, x^3\right)$

$$3x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 + \delta B_4$$
$$3x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = \alpha 3 + \beta(x+2) + \gamma(x+1)^2 + \delta x^3$$
$$3x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 3\alpha + x\beta + 2\beta + x^2\gamma + 2x\gamma + \gamma + x^3\delta$$
$$3x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = x^3\delta + x^2\gamma + x(\beta + 2\gamma) + (3\alpha + 2\beta + \gamma)$$

$3x^3 = x^3\delta \Rightarrow \delta = 3$

$-2x^2 = x^2\gamma \Rightarrow \gamma = -2$

$-3x = x(\beta + 2\gamma) \Rightarrow \beta + 2\gamma = -3$

$\beta = -3 - 2\gamma$

$\beta = 1$

$-3 = 3\alpha + 2\beta + \gamma \Rightarrow 3\alpha = -3 - 2\beta - \gamma$

$3\alpha = -3 - 2 + 2$

$\alpha = -1$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-1, 1, -2, 3)$

str. 156, př. 4

$A: R^2 \to R^2$ je lin. zobrazení, pro které platí $A(3,4) = (1,1)$ a $A(2,3) = (1,1)$. Vypočtěte $A(6,9)$ a určete hod A, def A, ker A.

1)

$\alpha(3,4) + \beta(2,3) = (6,9)$

$3\alpha + 2\beta = 6$

$4\alpha + 3\beta = 9$

$\alpha = 0$

$\beta = 3$

$0(1,1) + 3(1,1) = (3,3)$

$A(6,9) = (3,3)$

2)

Jádro zobrazení $KerA \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$3a + 4b = 1 \qquad a = -1$

$3c + 4d = 1 \qquad b = 1$

$2a + 3b = 1 \qquad c = -1$

$2c + 3d = 1 \qquad d = 1$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \approx [-1;1]$

$hodA = 1 = defA$

$KerA = (-1;1)$

3) Defekt báze je dimense jádra.

$defA = \dim KerA = 1$.

str. 157, př. 15

Nechť $A : R^3 \to R^4$ je lineární zobrazení, pro které platí:

$$A(2,2,0) = (14,14,10,18)$$
$$A(0,-1,-1) = (3,6,2,-1)$$
$$A(0,0,1) = (8,9,5,7)$$

Nalezněte všechny vektory $\vec{x} \in R^4$, splňující vztah $A(\vec{x}) = (8,9,7,12)$.

1)

$A(\vec{x}) = \alpha(14,14,10,18) + \beta(3,6,2,-1) + \gamma(8,9,5,7) = (8,9,7,12)$

$14\alpha + 3\beta + 8\gamma = 8$

$14\alpha + 6\beta + 9\gamma = 9$

$10\alpha + 2\beta + 5\gamma = 7$

$18\alpha - \beta + 7\gamma = 12$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 3 & 8 & 8 \\ 14 & 6 & 9 & 9 \\ 10 & 2 & 5 & 7 \\ 12 & -1 & 7 & 12 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 3 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -10 & 18 \\ 0 & -68 & -46 & 24 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 3 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 34 & 23 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 3 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 14 & -28 \\ 0 & 0 & 147 & 305 \end{array}\right]$$

2)

Nechť $\vec{a}=\left(-2\vec{i},3\vec{j}+\vec{k}\right),\vec{b}=\left(-\vec{i},2\vec{j},-3\vec{k}\right)$. Najděte vektor $\vec{x}$, který je kolmý k vektorům $\vec{a},\vec{b}$ a pro který platí $\vec{x}\left(2\vec{i},-\vec{j},\vec{k}\right)=2$.

$$x_1=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ i & j & k\end{vmatrix}=-4k+9i-j-2i-3k+6j=-7k+7i-7j$$

$$M.\vec{x}\left(2\vec{i},-\vec{j},\vec{k}\right)=2$$

$$M\left[\left(7\vec{i},-7\vec{j},-7\vec{k}\right)\left(2\vec{i},-\vec{j},\vec{k}\right)\right]=2$$

$$M\left(14+7-7\right)=2$$

$$M=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$$

$$x=Mx_1$$

$$x=\frac{1}{7}\left(-7k+7i-7j\right)$$

$$x=-k+i-j=$$

$$=i-j-k$$