

str. 112, př. 1

$$x + 2y + 4z = 5$$

$$2x - y + 3z = 5$$

$$-x + 3y + z = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 0) + t(-2, -1, 1), t \in R$$

$$x + 2y + 4z = 5$$

$$y + z = 1$$

$$z = t$$

$$y = 1 - t$$

$$x = 3 - 2t$$

str. 112, př. 2

$$x + 2y - z = 5$$

$$2x - y + 3z = -5$$

$$4x + 3y + z = 5$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & -15 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 3, 0) + t(-1, 1, 1), t \in R$$

$$x + 2y - z = 5$$

$$y - z = 3$$

$$z = t$$

$$y = 3 + t$$

$$x = -1 - t$$

str. 112, př. 3

$$x + 2y + 4z = 3$$

$$2x - y + 3z = 3$$

$$-x + 3y + z = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow \text{nemá řešení}$$

Soustava rovnic nemá řešení.

str. 112, př. 4

$$x + 2y - z - 3u = 1$$

$$3x - y + 2z + u = 2$$

$$5x + 3y + 0z - 5u = 7$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & -5 & 7 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 10 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 10 & 2 \end{array} \right]$$

Soustava rovnic nemá řešení.

str. 112, př. 5

$$x + 2y - z - u = 2$$

$$2x - 5y + z + 3u = 1$$

$$4x - y - z + u = 5$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & -3 & -5 & 3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & -5 & 3 \end{array} \right]$$

$$x + 2y - z - u = 5$$

$$9y - 3z - 5u = 2$$

$$z = 2, u = 0$$

$$x + 2 - 2 - 0 = 0$$

$$x = 2$$

$$9y - 3 \cdot 2 = 3$$

$$y = 1$$

$$(2, 1, 2, 0)$$

$$x + 2y - z - u = 0$$

$$x + 2\left(\frac{1}{3}s + \frac{5}{9}t\right) - s - t = 0$$

$$x + \frac{2}{3}s + \frac{10}{9}t - s - t = 0$$

$$x = \frac{1}{3}s - \frac{1}{9}t$$

$$9y - 3z - 5u = 0$$

$$y = \frac{1}{3}s + \frac{5}{9}t$$

$$(x, y, z, u) = (2, 1, 2, 0) + s(1, 1, 3, 0) + t(-1, 5, 0, 9), s \in R, t \in R$$

str. 112, př. 6

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 - 2t + 3t = 0$$

$$x_1 = -t$$

$$(x_1, x_2, x_3) = t(-1, 1, 1), t \in R$$

str. 112, př. 7

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \end{array} \right]$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$3x_2 - 6x_3 = 0$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 2t$$

$$x_1 = 0$$

$$(x_1, x_2, x_3) = t(0, 2, 1), t \in R$$

str. 112, př. 8

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_3 = s, x_4 = t$$

$$x_2 = t - s$$

$$x_1 = -2t - 2s$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(-2, -1, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1), s \in R, t \in R$$

str. 112, př. 9

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$-x_2 + x_3 = 0$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

$$x_4 = t$$

$$x_3 = -t$$

$$-x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 = -t$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + 2(-t) + t + 3(t) = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(-2, -1, -1, 1)$$

str. 112, př. 10

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & | & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & | & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 10 & | & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & | & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & | & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = t$$

$$x_3 = -t$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2$$

$$x_2 - 2t + 3t = 1$$

$$x_1 = t$$

$$x_2 = 1 - t$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 0) + t(1, -1, 1, 1), t \in R$$

str. 112, př. 11

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \end{array} \right]$$

$$x_3 = r, x_4 = s, x_5 = t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23$$

$$x_1 = -16 + r - s + 5t$$

$$x_2 = 23 - 2r - 2s - 6t$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-16, 23, 0, 0, 0) + r(1, -2, 1, 0, 0) + s(1, -2, 0, 1, 0) + t(5, -6, 0, 0, 1)$$

$$r \in R, s \in R, t \in R$$

str. 112, př. 12

$$x + y - z = a$$

$$2x - y + z = b$$

$$x + 4y - 4z = c$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & 4 & -4 & c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 3 & b \\ 0 & 3 & -3 & c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 3 & b - 2a \\ 0 & -3 & 3 & a - c \end{array} \right]$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = a$$

$$-3x_2 + 3x_3 = b - 2a$$

$$-3x_2 + 3x_3 = a - c$$

$$b - 2a = a - c$$

$$3a - b - c = 0$$

str. 112, př. 13

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = b$$

$$-x_1 + x_2 - 4x_3 = c$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 4 & b \\ -1 & 1 & -4 & c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 3 & b - a \\ 0 & 3 & -3 & a + c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 3 & b - a \\ 0 & -3 & 3 & -a - c \end{array} \right]$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a$$

$$-3x_2 + 3x_3 = b - a$$

$$-3x_2 + 3x_3 = -a - c$$

$$b - a = -a - c$$

$$2a - b + c = 0$$

str. 112, př. 14

$$-2x_2 + 2x_3 = a$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = b$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = c$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 0 & -2 & 2 & a \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -2 & 2 & c-b \\ 0 & -2 & 2 & a \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -2 & 2 & c-b \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array} \right]$$

$$c - b - a = 0$$

$$c = b + a$$

$$x_3 = t$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = b$$

$$-2x_2 + 2x_3 = a$$

$$-2x_2 = a - 2x_3$$

$$x_3 = t - \frac{1}{2}a$$

$$x_1 + \left(t - \frac{1}{2}a \right) - t = b$$

$$2x_1 = 2b + a$$

$$x_1 = b + \frac{a}{2}$$

str. 112, př. 15

$$x_1 + x_2 - px_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1 + px_2 - x_3 = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -p & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & p & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$D = 2 + 3 - p^2 - 2p - 3p + 1$$

$$-p^2 - 5p + 6 = 0$$

$$p_{1,2} = \{-6, 1\}$$

Pro $p_{1,2} = \{-6, 1\}$ je matice singulární, a proto má soustava rovnic pouze jedno řešení.

Pro $p \neq \{-6, 1\}$ není matice singulární, v soustavě je volitelný parametr, a proto má soustava nekonečně mnoho řešení.

str. 112, př. 20

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$ax_1 - 6x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 3 & 0 \\ a & -6 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & a & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & a-8 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & a+22 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-11 & 0 \end{array} \right]$$

$$a = 11$$

V případě $a \neq 11$ je soustava netriviální a má právě jedno řešení.

str. 112, př. 21

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0$$

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + ax_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 6 & a-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & a-10 \end{bmatrix}$$

$$-13 - 1 = 13 + a - 10$$

$$a = 11$$

V případě $a \neq 11$ je soustava netriviální a má právě jedno řešení.

str. 112, př. 22

Řešte soustavu rovnic s parametrem p .

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - px_4 = 0 \\ px_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -p \\ p & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$1(-1)^2 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -p \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = -7 + 2 + 2p + 1 - 14 - 2p = -18$$

$$-2(-1)^4 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = -2(-28 - 1 - 4 + 4 + 7) = 36$$

$$p(-1)^5 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{bmatrix} = -p(4p + 1 - 2 - 4 + 2 - p) = -3p^2 + 3p$$

$$D = -3p^2 + 3p + 36 - 18 = 0$$

$$p_{1,2} = \{-2, 3\}$$

Pro $p_{1,2} = \{-2, 3\}$ má soustava nekonečně mnoho řešení, pro $p_{1,2} \neq \{-2, 3\}$ je má soustava pouze triviální řešení.

str. 112, př. 23

Řešte soustavu rovnic s parametrem a .

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3$$

$$3x_1 + 4x_2 - 11x_3 + ax_4 = a - 5$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -11 & a & a-5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & a-3 & a-8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a-5 & a-6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & a-7 \end{array} \right]$$

$$a - 7 = 0$$

$$a = 7$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení pro $a = 7$.

str. 112, př. 24

Určete všechna reálná čísla a tak, aby soustava rovnic měla řešení závislé na dvou parametrech.

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = a$$

$$ax_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & a \\ a & 3 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & a \\ 1 & -3 & 3 & a & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 2-a \\ 0 & -5 & 5 & a-2 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array} \right]$$

$$a - 1 = 0 = 1 - a$$

$$a = 1$$

Soustava má řešení závislé na dvou parametrech právě, když $a = 1$.