

str. 93, př. 1

Nalezněte inverzní matici k matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

str. 93, př. 2

Nalezněte inverzní matici k matici $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -21 & -15 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

str. 93, př. 3

Nalezněte inverzní matici.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$ad - bc \neq 0$$

str. 93, př. 4

Nalezněte inverzní matici.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$D = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - (-\sin \alpha) \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

str. 93, př. 6

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

str. 93, př. 7

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 16 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

str. 93, př. 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$D_A = 0 \Rightarrow$ Matice A je singulární, proto nemá inverzní matici.

$$a + 2b = 2$$

$$2a + 4b = 4 \Rightarrow a + 2b = 2 \Rightarrow a = 2 - 2b$$

$$c + 2d = 1 \Rightarrow c + 2d = 1 \Rightarrow c = 1 - 2d$$

$$2c + 4d = 2$$

$$X = \begin{bmatrix} 2-2b & b \\ 1-2d & d \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

str. 93, př. 9

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

str. 93, př. 10

$$AXA = A^2B \Rightarrow X = A^{-1}A^2BA^{-1} = ABA^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

str. 93, př. 11

$$AXA = BA^2 \Rightarrow X = A^{-1}BA^2A^{-1} = A^{-1}BA$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

str. 94, př. 12

$$AXA = E \Rightarrow X = A^{-1}XA^{-1} = A^{-2} = (A^{-1})^2$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = (A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

str. 94, př. 13

$$AXA = BA \Rightarrow X = A^{-1}BAA^{-1} = A^{-1}B$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

str. 94, př. 14

$$XA - A = E \Rightarrow X = EA^{-1} + AA^{-1} = EA^{-1} + E = A^{-1} + E$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} + E = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

str. 94, př. 15

$$A - XA = E \Rightarrow X = E - A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = E - A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

str. 94, př. 16

$$AX = BX + C \Rightarrow X = (A - B)^{-1}C$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - B) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 7 & -3 \\ 8 & -6 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = (A - B)^{-1}C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 7 & -5 & 6 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

str. 94, př. 17

$$AX + X + A = 0 \Rightarrow X = -(A + E)^{-1}A$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + E) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -(A + E)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -4 & -1 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = -(A + E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -4 & -1 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{??????}$$