str. 83, př. 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 33 & 5a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a-35 \end{bmatrix}$$

$5a-35=0$

$a=7$

Matice bude lineárně závislá právě když $a=7$.

str. 83, př. 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & a & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & a & 7 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -a & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 2a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-12 \end{bmatrix}$$

$1-a-3=0$

$a=-2$

$2a-12=0$

$a=6$

Matice není lineárně závislá v žádném případě.

str. 83, př. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & a & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -10 & 2a-15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -66 & 14a-98 \end{bmatrix}$$

$14a-98=0$

$a=7$

Matice bude lineárně závislá právě když $a=7$.

str. 83, př. 4

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & a-5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & a+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$a-1=0$

$a=1$

Matice bude lineárně závislá právě když $a=1$.

str. 83, př. 5

str. 83, př. 6
Vypočtěte AB+CD

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad CD=\begin{bmatrix}5 & 6\\ -2 & 8\end{bmatrix}\quad AB+CD=CD=\begin{bmatrix}5 & 6\\ -2 & 8\end{bmatrix}$$

str. 83, př. 7
Vypočtěte AB-CD

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\quad B=C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 15 & 6 & -3\end{bmatrix}\quad CD=\begin{bmatrix}-8 & -8 & 8\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\quad AB-CD=\begin{bmatrix}13 & 10 & -9\\ 16 & 7 & -2\end{bmatrix}$$

str. 83, př. 8
Vypočtěte AB+BC+BA=AB+B.(C+A)

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-11 & 10\\ 11 & -6\end{bmatrix}\quad C+A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 6\end{bmatrix}\quad B.(C+A)=\begin{bmatrix}-1 & 12\\ 7 & -12\end{bmatrix}$$

$$AB+B(C+A)=\begin{bmatrix}-12 & 22\\ 18 & -18\end{bmatrix}$$

str. 83, př. 9
Nalezněte všechny matice záměnné s maticí.

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

AX=XA

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a+3c & -b+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a-b & a+3b\\ 2c-d & c+3d\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}2a+c=2a-b\\ 2b+d=a+3b\\ -a+3c=2c-d\\ -b+3d=c+3d\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}0a+b+c+0d=0\\ -a-b+0c+d=0\\ -a+0b+c+d=0\\ 0a-b-c+0d=0\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -a-b+d&=0 \\ b+c&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} d&=a+b \\ c&=-b \end{aligned}$$

$$X=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{bmatrix}=a.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+b.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

str. 83, př. 10

Nalezněte všechny matice záměnné s maticí.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

AX=XA

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a+2c&=a+3b \\ b+2d&=2a+4b \\ 3a+4c&=c+3d \\ 3b+4d&=2c+4d \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 0a-3b+2c+0d&=0 \\ -2a-3b+0c+2d&=0 \\ 3a+0b+3c-3d&=0 \\ 0a+3b-2c+0d&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a+c&=d \\ -3b&=-2c \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a&=d-c \\ b&=\frac{2}{3}c \end{aligned}$$

$$X=\begin{bmatrix} d-c & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{bmatrix}=c.\begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+d.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

str. 83, př. 11

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Je-li n sudé bude výsledná matice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pro n liché bude matice $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.