str. 45, př. 4
Zjistěte jestli jsou vektory (1,2,-2,0), (3,4,-1,1), (1,5,7,0), (-2,3,3,-2) lineárně závislé.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 9 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$c = d \Leftrightarrow c = -d$
$b - 2d = 0 \Leftrightarrow b = 2d$
$a + 3b + c - 2d = 0 \Leftrightarrow a = -3b - c + 2d$

Po dosazení $c = 1$, vychází $a = -3, b = -2, d = -1$.
$-3(1,2,-2,0) - 2\left(3,4,-1,1\right) + (1,5,7,0) - (-2,3,3-2) = (0,0,0,0)$
Vektory jsou lineárně závislé.

str. 45, př. 8
Polynom $7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ vyjádřete jako lineární kombinací polynomů $x^3 + 3x^2 - x + 2, 2x^2 - 2 + 3, 2x^3 - 2x^2 + x + 1^2$.

$$\begin{aligned} a + 0b + 2c &= 7 \\ 3a + 2b - 2c &= -7 \\ -a - b + c &= 4 \\ 2a + 3b + c &= -1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & -2 & 8 & 28 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Po dosazení $d = 1$, vychází $a = 1, b = -2, c = 3$.
$7x^3 - 7x^2 + 4x - 1 = \left(x^3 + 3x^2 - x + 2\right) - 2\left(2x^2 - 2 + 3\right) + 3\left(2x^3 - 2x^2 + x + 1\right)$

str. 45, př. 11
Pro která reálná čísla t jsou vektory $(1,1,0),(1,0,1),(0,1,t)$ lineárně nezávislé?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -t-1 \end{bmatrix} \qquad t = -1$$

Vektory $(1,1,0),(1,0,1),(0,1,t)$ jsou lineárně nezávislé pro $t \neq -1, t \in R$.

str. 53, př. 4

Určete hodnost matice.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -12 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hodnost matice je h=2.

str. 53, př. 8

Nalezněte takové číslo a, aby matice měla nejmenší hodnost.

$$\begin{bmatrix} 5 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & a & -1 & 2 \\ 0 & 2a+5 & -2-5a & -1 \\ 0 & a-3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad a=3$$

Pokud bude $a=3$ bude mít matice hodnost 2, v jiném případě bude hodnost 3, pro $a \in R$.

str. 54, př. 10

Pro která reálná čísla a,b,c je hod **A** = 3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & a \\ 1 & 4 & -2 & -2 & b \\ 1 & -12 & 8 & 0 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & a \\ 0 & -8 & 5 & 1 & a-2b \\ 0 & 24 & -15 & -3 & a-2c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & a \\ 0 & -8 & 5 & 1 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a-6b-2c \end{bmatrix}$$

$$4a-6b-2c=0$$
$$2a-3b-c=0$$

Matice bude mít hodnotu 3 právě když, $2a-3b-c \neq 0, (a,b,c) \in R$.