1. Systém řezů M

Nechť $M : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(X)$ je systém řezů fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(X)$, tj. $M = R_A$. Pak M splňuje podmínky:

$M(0) = X$, $\quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\alpha) \supseteq M(\beta)$, $\quad 0 < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap_{\alpha<\beta} M(\alpha)$

1.1. Negace - definice

$\alpha \leq \beta \Rightarrow \underset{\cdot}{\neg}\beta \leq \underset{\cdot}{\neg}\alpha$

$\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \alpha$

1.2. Standartní negace

$\underset{s}{\neg}\alpha = 1 - \alpha$

1.3. Rovnovážná hodnota

$\underset{\cdot}{\neg} e = e$

1.4. Vlastnosti negace

Každá fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$ je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky $\underset{\cdot}{\neg}1 = 0, \underset{\cdot}{\neg}0 = 1$. Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. $\underset{\cdot}{\neg}^{-1} = \underset{\cdot}{\neg}$ (neboli $\underset{\cdot}{\neg}$ je sama k sobě inverzní).

1.5. Generátor fuzzy negace

Nechť $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ je rostoucí bijekce. Pak funkce $\underset{i}{\neg} = i^{-1} \circ \underset{S}{\neg} \circ i$, tj. $\underset{i}{\neg}\alpha = i^{-1}\big(\underset{S}{\neg} i(\alpha)\big)$ je fuzzy negace.

$i(\alpha) = \frac{\alpha + \underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2}$

1. vypočti $i^{-1}()$
2. udělej $1 - i(\alpha)$
3. udělej $i^{-1}(1 - i(\alpha)$

---

2. Konjunkce (t-norma)

komutativita: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \beta \underset{\cdot}{\wedge} \alpha$

asociativita: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma) = (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} \gamma$

monotonie: $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma$

okrajová podmínka: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha$

$\alpha \underset{D}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{S}{\wedge} \beta$

2.1. Standardní

$\alpha \underset{S}{\wedge} \beta = \min(\alpha, \beta)$. Idempotence ($\alpha \underset{S}{\wedge} \alpha = \alpha$)

2.2. Łukasiewiczova

$\alpha \underset{L}{\wedge} \beta = max(\alpha + \beta - 1, 0)$

2.3. Součinová

$\alpha \underset{P}{\wedge} \beta = \alpha \cdot \beta$.

2.4. Drastická

$$\alpha \underset{D}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2.5. Dělení

- nespojité
  Př: Drastická
- spojité
  - Nearchimédovské
    Př: Standartní
  - Archimédovské
    $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha < \alpha$ pro $\alpha \in (0,1)$
    - Nilpotentní
      Př: Łukasiewiczova
    - Striktní
      Př: Součinová
      $\beta < \ gamma, \alpha \neq 0$
      $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta < \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma$

3. Disjunkce

komutativita: $\alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha$

asociativita: $\alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma$

monotonie: $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \gamma$

okrajová podmínka: $\alpha \dot{\vee} 0 = \alpha$

$\alpha \overset{D}{\vee} \beta \geq \alpha \dot{\vee} \beta \geq \alpha \overset{S}{\vee} \beta$

3.1. Standardní

$\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta)$.

3.2. Łukasiewiczova

$\alpha \overset{L}{\vee} \beta = min(\alpha + \beta, 1)$

3.3. Součinová

$\alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta$.

3.4. Drastická

$$\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

3.5. Dělení

- nespojité
  Př: Drastická
- spojité
  - Nearchimédovské
    Př: Standartní
  - Archimédovské
    $\alpha \dot{\vee} \alpha > \alpha$ pro $\alpha \in (0,1)$
    - Nilpotentní
      Př: Łukasiewiczova
    - Striktní
      Př: Součinová
      $\beta < \ gamma, \alpha \neq 0$
      $\alpha \dot{\vee} \beta < \alpha \dot{\vee} \gamma$

4. Množinové operace

$\mu_{\bar{A}}(x) = \underset{\cdot}{\neg}\mu_A(x)$

$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \underset{\cdot}{\wedge} \mu_B(x)$ $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \dot{\vee} \mu_B(x)$

5. Relace

je fuzzy podmnožina kartézského součinu $X \times Y$, tedy $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$. Odpovídá jí funkce příslušnosti $\mu_R : X \times Y \to \langle 0,1\rangle$. Inverzní relace k R je $R^{-1} \in \mathcal{F}(Y \times X)$ taková, že $\forall x \in X\ \forall y \in Y : \mu_{R^{-1}}(y,x) = \mu_R(x,y)$.

5.1. reflexivita (hlavní diag. jedničky)

$\forall x \in X :\ (x,x) \in R$, tj. $E \subseteq R, \mu_R(x,x) = 1$

5.2. symetrie (symetrie dle hlav. diag)

$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, tj. $R = R^{-1}, \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$

5.3. antisymetrie

$\big((x,y) \in R\big) \wedge \big((y,x) \in R\big) \Rightarrow x = y$, tj. $R \cap R^{-1} \subseteq E$ $\mu_R(r,s) \underset{\cdot}{\wedge} \mu_R(s,r) = 0$

5.4. tranzitivita

$\big((x,y) \in R\big) \wedge \big((y,z) \in R\big) \Rightarrow (x,z) \in R$,tj. $R \circ R \subseteq R$ $\mu_R(x,z) \underset{\cdot}{\wedge} \mu_R(y,z) \leq \mu_R(x,z)$

5.5. částečné uspořádání

relace antisymetrická, reflexivní a tranzitivní,

5.6. ekvivalence

relace symetrická, reflexivní a tranzitivní.