

## Diferenciální rovnice

(Obyčejná) diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Řešení na intervalu  $I$ : funkce  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že pro každé  $x \in I$  je  $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ .

Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.

Cauchyova úloha: navíc počáteční podmínky

$$y(x_0) = y_{0,0}, \quad y'(x_0) = y_{0,1}, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$$

Cauchyova úloha je jednoznačně řešitelná, jestliže každá dvě řešení splývají na některém okolí  $x_0$ .

**Věta.** Je-li  $f$  spojitá funkce na  $I \times J$  ( $I, J$  intervaly),  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in J$ , pak Cauchyova úloha  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  má řešení na intervalu  $I' \subset I$ . Je-li navíc  $\frac{\partial f}{\partial y}$  omezená na  $I \times J$ , pak je Cauchyova úloha jednoznačně řešitelná.

**Poznámky.**

- 1)  $f(x, y) = g(x)h(y)$ : stačí spoj.  $g, h$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x)h'(y)$ .
- 2)  $f(x, y) = p(x)y + q(x)$ : stačí spoj.  $p, q$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = p(x)$ .

### DR 1. řádu se separovanými proměnnými

$$y' = g(x)h(y)$$

Předpoklady:  $g$  spojitá na intervalu  $I$ ,  $h$  spojitá na intervalu  $J$ .

- 1)  $h(y_1) = 0 \dots y(x) = y_1, x \in I$  je stacionární řešení
- 2)  $h(y) \neq 0$

$$\begin{aligned} y'(x) &= g(x)h(y(x)) \\ \int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx &= \int g(x) dx \\ \int \frac{dy}{h(y)} &= \int g(x) dx (+ c) \\ y(x) &= \dots \end{aligned}$$

Cauchyova úloha

Dopočítat  $c$  nebo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^x g(x) dx$$

Obecný postup:

- 1) Maximální intervaly spojitosti  $g(I)$ .
- 2) Stacionární řešení  $y(x) = y_1, x \in I$  pro  $h(y_1) = 0$ .
- 3) Maximální intervaly spojitosti a nenulovosti  $h(J)$ .
- 4) Pro  $(x_0, y_0) \in I \times J$ , existuje řešení uvnitř  $I \times J$ .

## Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Předpoklady:  $a_1, a_0, f$  spojité na intervalu  $I$ ,  $a_1 \neq 0$  na  $I$ . Cauchyova úloha má pak právě jedno řešení na  $I$ .

$D: y \mapsto a_1y' + a_0y$  je lineární zobrazení na prostoru funkcí diferencovatelných na  $I$ .

Přidružená homogenní rovnice:  $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ . Množina řešení je jádro lineárního zobrazení  $D$ .

Obecné řešení:  $y(x) = \tilde{y}(x) + \hat{y}(x)$ , kde  $\tilde{y}$  je obecné řešení přidružené homogenní rovnice a  $\hat{y}$  je jedno (partikulární) řešení původní rovnice.

Vydělením  $a_1(x)$  dostaneme LDR ve tvaru ( $p, q$  spojitě):

$$y' + p(x)y = q(x)$$

### Homogenní LDR 1. řádu

$$y' + p(x)y = 0$$

Řešíme separací proměnných:

$$y(x) = ce^{-\int p(x) dx}, \quad x \in I, \quad (c \in \mathbb{R})$$

### Nehomogenní LDR 1. řádu

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Metoda *variace konstanty*: hledáme partikulární řešení ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí.

$$\hat{y}(x) = c(x)e^{-\int p(x)}$$

Dosadíme do rovnice a spočítáme  $c(x)$ :

$$c'(x)e^{-\int p(x)} - c(x)e^{-\int p(x)}p(x) + p(x)c(x)e^{-\int p(x)} = q(x)$$

$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)}$$

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)}$$

$$\hat{y}(x) = e^{-\int p(x)} \cdot \int q(x)e^{\int p(x)}$$

Cauchyova úloha pro LDR 1. řádu

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

- 1) Obecné řešení přidružené homogenní rovnice separací proměnných.
- 2) Partikulární řešení metodou variace konstanty, obecné řešení dané LDR.
- 3) Určení konstanty dosazením počáteční podmínky.

## Lineární diferenciální rovnice

## LDR s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

**Věta.** Jsou-li  $a_{n-1}, \dots, a_0, f$  spojité funkce na intervalu  $I$ , pak Cauchyova úloha má právě jedno řešení na  $I$ .

Předpoklady:  $a_n \neq 0$ ,  $f$  je spojitá na intervalu.

### Homogenní LDR ( $f(x) = 0$ na $I$ )

### Homogenní LDR s konstantními koeficienty

**Věta.** Množina řešení homogenní LDR řádu  $n$  tvoří lineární prostor dimenze  $n$ .

*Charakteristická rovnice:*

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Důkaz.  $D$ :  $y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0$  je lineární zobrazení, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

**Věta.** 1) Je-li  $\lambda$  reálný kořen charakteristické rovnice násobnosti  $k$ , pak funkce

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\lambda x}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.

2) Je-li  $\alpha + \beta j$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) imaginární kořen charakteristické rovnice násobnosti  $k$ , pak funkce

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.

3) Všechna tato řešení tvoří fundamentální systém řešení.

### Nehomogenní LDR s konstantními koeficienty

$y(x_0)$	$y'(x_0)$	$\dots$	$y^{(n-1)}(x_0)$	$\rightarrow$	řešení C. úlohy
1	0	$\dots$	0	$\rightarrow$	$y_0(x)$
0	1	$\dots$	0	$\rightarrow$	$y_1(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	$\rightarrow$	$y_{n-1}(x)$
$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$\dots$	$y_{0,n-1}$	$\rightarrow$	$\sum_{i=0}^{n-1} y_{0,i} y_i(x)$

$\Rightarrow$  lineární obal  $\{y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)\}$  je celý prostor řešení

Hledáme partikulární řešení.

1) *Variace konstant:*

$$\tilde{y}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \\ \hat{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + \dots + c_n(x) y_n(x) \\ \hat{y}'(x) = c_1(x) y_1'(x) + \dots + c_n(x) y_n'(x) \\ + \underbrace{c_1'(x) y_1(x) + \dots + c_n'(x) y_n(x)}_{=0}$$

$$\hat{y}''(x) = c_1(x) y_1''(x) + \dots + c_n(x) y_n''(x) \\ + \underbrace{c_1'(x) y_1'(x) + \dots + c_n'(x) y_n'(x)}_{=0}$$

$\vdots$

$$\hat{y}^{(n)}(x) = c_1(x) y_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x) y_n^{(n)}(x) \\ + c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x)$$

$$A_0 y_0(x) + \dots + A_{n-1} y_{n-1}(x) = 0 \xrightarrow{x=x_0} A_0 = 0$$

$$' : A_0 y_0'(x) + \dots + A_{n-1} y_{n-1}'(x) = 0 \xrightarrow{x=x_0} A_1 = 0 \quad \dots$$

$\Rightarrow$  funkce  $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$  jsou lineárně nezávislé

**Definice.** Báze množiny řešení homogenní LDR se nazývá *fundamentální systém* řešení.

**Věta.** Necht'  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  jsou řešení homogenní LDR řádu  $n$  na intervalu  $I$ . Tyto funkce jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když pro každé  $x \in I$  je následující determinant (Wronského, wronskián) nenulový:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Důkaz. 1) Jsou-li funkce závislé, pak některá  $y_i$  je lineární kombinací ostatních,  $y_i'$  je stejnou kombinací derivací ostatních,  $\dots$   $i$ -tý sloupec determinantu je kombinací ostatních, tj. determinant je nulový pro každé  $x \in I$ .

2) Je-li determinant nulový v  $x_0$ , pak homogenní soustava rovnic s touto maticí má netriviální řešení  $(A_1, \dots, A_n)$ ,  $A_1 y_1(x) + \dots + A_n y_n(x)$  je řešení s nulovými počátečními podmínkami v  $x_0$ , tj. nulové, tj. dané funkce jsou závislé.

**Poznámka.** Věta neplatí, pokud funkce nejsou řešením jedné LDR.

### Nehomogenní LDR

**Věta.** 1) Je-li  $y$  řešení LDR a  $\tilde{y}$  řešení přidružené homogenní rovnice, pak  $y + \tilde{y}$  je řešení dané LDR.

2) Jsou-li  $y_1, y_2$  řešení LDR, pak  $y_1 - y_2$  je řešení přidružené homogenní rovnice.

3) Jsou-li  $y_1, y_2$  řešení pro pravé strany  $f_1, f_2$ , pak  $y_1 + y_2$  je řešení pro pravou stranu  $f_1 + f_2$  (princip superpozice).

2) *Metoda odhadu* pro kvazipolynomiální pravou stranu: Jsou-li  $P, Q$  polynomy stupně nejvýše  $m$ , ( $\alpha + \beta j$ )  $k$ -násobný kořen charakteristického polynomu,

$$f(x) = e^{\alpha x} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x),$$

pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$\hat{y}(x) = x^k e^{\alpha x} (\hat{P}(x) \cos \beta x + \hat{Q}(x) \sin \beta x),$$

kde  $\hat{P}, \hat{Q}$  jsou polynomy stupně nejvýše  $m$ .

## Laplaceova transformace

**Definice.** Laplaceovým obrazem funkce  $f$  definované na  $\langle 0, \infty \rangle$  je funkce

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

pokud integrál konverguje pro alespoň jedno  $p \in \mathbb{R}$ .

Značení:  $\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(p)$ ,  $\mathcal{L}\{f\} = F$ ,  $f \stackrel{\Delta}{=} F$ .

**Příklady.**  $e^{t^2}$  nemá Laplaceův obraz

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}, \quad p > a$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}, \quad p > 0$$

**Poznámky.** 1)  $F$  se obvykle uvažuje jako funkce komplexní proměnné pro  $\operatorname{Re} p > p_f$ .

2) Někdy se uvažují funkce  $f(t)$  definované na  $\mathbb{R}$ , které jsou nulové pro  $t < 0$  – místo  $\sin t$  na  $\langle 0, \infty \rangle$  se píše  $\sin t \cdot H(t)$ , kde  $H(t)$  je tzv. Heavisideova funkce (někdy se bere  $H(0) = \frac{1}{2}$ ):

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

**Definice.** Funkce  $f(t)$  definovaná na  $\langle 0, \infty \rangle$  je předmět standardního typu ( $f$  patří do třídy  $\mathcal{L}_0$ ), jestliže:

- 1)  $f$  je po částech spojitá,
- 2)  $f$  je exponenciálního řádu ( $\alpha$ ), tj. existují čísla  $M, \alpha \in \mathbb{R}$ :

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle.$$

**Věta.** Necht'  $f$  je předmět standardního typu exponenciálního řádu  $\alpha$ . Pak Laplaceův obraz funkce  $f$  je definován na  $(\alpha, \infty)$  a  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ .

**Důkaz.**  $|\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt| \leq \int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt \leq \int_0^{\infty} M e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} M e^{-(p-\alpha)t} dt = [-\frac{M}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t}]_0^{\infty} = \frac{M}{p-\alpha}$  pro  $p > \alpha$ .

**Příklady.**

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad p > 0$$

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{p}{p^2 + 1}, \quad p > 0$$

**Věta** (o linearitě). Jsou-li  $f, g \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , pak

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a \mathcal{L}\{f\} + b \mathcal{L}\{g\}, \quad (p > \alpha).$$

**Důkaz.** Přímý důsledek linearit integrálu.

**Věta** (o derivaci obrazu). Je-li  $f \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $F = \mathcal{L}\{f\}$ , pak

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -F'(p), \quad p > \alpha.$$

**Důkaz** (náznak).  $F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} (f(t) e^{-pt}) dt = \int_0^{\infty} f(t) (-t) e^{-pt} dt = -\int_0^{\infty} (t f(t)) e^{-pt} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$

**Příklad.**

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0.$$

**Věta** (o integraci obrazu). Je-li  $f \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $F = \mathcal{L}\{f\}$  a existuje-li vlastní  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ , pak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^{\infty} F(q) dq, \quad p > \alpha.$$

**Poznámka.**  $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = -\int F(p)$ , integrační konstanta se určí z podmínky  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ .

**Věta** (o substituci [posunu] v obrazu). Je-li  $f \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $F = \mathcal{L}\{f\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , pak

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(p-a), \quad p > \alpha + a.$$

**Důkaz.**  $|e^{at} f(t)| \leq e^{at} M e^{\alpha t} = M e^{(\alpha+a)t}$

$$\int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{(a-p)t} dt = F(p-a)$$

**Příklad.**  $\mathcal{L}\{e^{at} \sin t\} = \frac{1}{(p-a)^2 + 1}$ ,  $p > a$

**Věta** (o změně měřítka). Je-li  $f \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $F = \mathcal{L}\{f\}$ ,  $a > 0$ , pak

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad p > a \cdot \alpha.$$

**Důkaz.**  $|f(at)| \leq M e^{\alpha(at)} = M e^{(a\alpha)t}$

$$\int_0^{\infty} f(at) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} at = u \\ a dt = du \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(u) e^{-(p/a)u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

**Příklady.**

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0$$

## Zpětná Laplaceova transformace

**Věta.** Jsou-li  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $\mathcal{L}\{f_1\} = \mathcal{L}\{f_2\}$  na  $(\alpha, \infty)$ , pak  $f_1(t) = f_2(t)$  na  $\langle 0, \infty \rangle$  s výjimkou nejvýše spočetně mnoha izolovaných bodů.

**Věta.** Racionální funkce je Laplaceovým obrazem funkce třídy  $\mathcal{L}_0$  právě tehdy, když je ryze lomená. Pak je obrazem na intervalu  $(\alpha, \infty)$ , kde  $\alpha$  je největší reálná část kořenů jmenovatele.

Důkaz.  $\Rightarrow$ :  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$

$\Leftarrow$ : rozklad na součet parciálních zlomků, linearita

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{at}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$$

pro kvadratické členy ve jmenovateli:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+C}{(p^2+bp+c)^n}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(p+\frac{b}{2})+(C-\frac{b}{2})}{[(p+\frac{b}{2})^2+c-\frac{1}{4}b^2]^n}\right\}$$

$$= e^{-\frac{b}{2}t} \left[ \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{f_n(t)} + \frac{2C-b}{2} \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{g_n(t)} \right]$$

$$f_1(t) = \cos \omega t, \quad f_{n+1}(t) = \frac{1}{2n} t g_n(t)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad g_{n+1}(t) = \frac{1}{2n\omega^2} [(2n-1)g_n(t) - t g_n'(t)]$$

## Diferenciální a integrálně diferenciální rovnice

Zobrazíme Laplaceovou transformací, vyřešíme algebraickou rovnici, provedeme zpětnou transformaci.

**Věta** (o obrazu derivace). Je-li  $f' \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $F = \mathcal{L}\{f\}$  a  $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \in \mathbb{R}$ , pak

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0+), \quad (p > \max\{\alpha, 0\}).$$

Důkaz.  $\int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} u = e^{-pt} & v' = f'(t) \\ u' = -p e^{-pt} & v = f(t) \end{matrix} \right| =$

$$= [f(t) e^{-pt}]_0^\infty + \int_0^\infty p f(t) e^{-pt} dt = -f(0+) + p \cdot F(p)$$

**Důsledek.**

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = p^n \mathcal{L}\{f\} - p^{n-1} f(0+) - \dots - p f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

**Věta** (o obrazu integrálu). Je-li  $f \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $F = \mathcal{L}\{f\}$ , pak

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(p)}{p}, \quad (p > \max\{\alpha, 0\}).$$

Důkaz.  $g(t) = \int_0^t f(u) du, \quad g(0+) = 0$

$$F(p) = \mathcal{L}\{g'(t)\} = p \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0+) = p \mathcal{L}\{g(t)\}$$

**Definice.** Konvoluce funkcí  $f, g \in \mathcal{L}_0$  je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du.$$

Vlastnosti:

- 1) komutativita:  $f * g = g * f$
- 2) asociativita:  $(f * g) * h = f * (g * h)$
- 3) distributivita ke sčítání:  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

**Věta** (o obrazu konvoluce). Jsou-li  $f, g \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $F = \mathcal{L}\{f\}$ ,  $G = \mathcal{L}\{g\}$ , pak

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(p) \cdot G(p), \quad p > \alpha.$$

Důkaz (náznak).  $\int_0^\infty \left( \int_0^t f(t-u) g(u) du \right) e^{-pt} dt =$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u) g(u) e^{-pt} dt du =$$

$$= \int_0^\infty g(u) e^{-pu} \left( \int_u^\infty f(t-u) e^{-p(t-u)} dt \right) du \stackrel{(t-u=v)}{=} \int_0^\infty g(u) e^{-pu} \left( \int_0^\infty f(v) e^{-pv} dv \right) du =$$

$$= \left( \int_0^\infty f(v) e^{-pv} dv \right) \cdot \left( \int_0^\infty g(u) e^{-pu} du \right) = F(p) \cdot G(p)$$

**Poznámky.**

- 1)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(p) \cdot G(p)\} = (f * g)(t)$ .
- 2)  $(H * f)(t) = \int_0^t f(t) dt$ , tj. věta o obrazu integrálu je zvláštním případem věty o obrazu konvoluce.

**Věta** (o translaci). Je-li  $f \in \mathcal{L}_0$  exponenciálního řádu  $\alpha$ ,  $a \geq 0$ , pak

$$\mathcal{L}\{f(t) H(t-a)\} = e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t+a)\}, \quad p > \alpha$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a) H(t-a)\} = e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad p > \alpha$$

Důkaz.  $\mathcal{L}\{f(t-b) H(t-a)\} =$

$$= \int_0^\infty f(t-b) H(t-a) e^{-pt} dt = \int_a^\infty f(t-b) e^{-pt} dt \stackrel{(t-a=u)}{=} \int_0^\infty f(u+a-b) e^{-p(u+a)} du = e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t+a-b)\}$$

první vztah dostaneme pro  $b=0$ , druhý pro  $b=a$

**Konečný impuls:**  $f(t)$  na omezeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ :

$$f(t) \cdot [H(t-a) - H(t-b)].$$

**Věta** (o obrazu periodické funkce). Je-li  $f \in \mathcal{L}_0$  periodická funkce s periodou  $T$ , pak  $f$  je exponenciálního řádu 0 a její obraz je

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t) e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}}, \quad p > 0.$$

Důkaz.  $\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt =$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} t = u + nT \\ dt = du \end{matrix} \right| =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(u) e^{-p(u+nT)} du =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (e^{-pT})^n \int_0^T f(u) e^{-pu} du =$$

$$= \left( \int_0^T f(u) e^{-pu} du \right) / (1 - e^{-pT})$$

## Prostory $\mathbb{R}^n$

Euklidovský prostor  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ :  $n$ -rozměrné aritmetické vektory  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  s operacemi

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) && \text{součet} \\ a\mathbf{x} &= (ax_1, \dots, ax_n) && \text{skalární násobek} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= x_1y_1 + \dots + x_ny_n && \text{skalární součin}\end{aligned}$$

počátek  $O$  kartézského systému souřadnic, bodový prostor

1)  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  tvoří (standardní) ortonormální bázi  $\mathbb{R}^n$ .

2) *Nulový vektor*:  $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)$ .

3) *Norma* (euklidovská):  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

4) Vzájemně jednoznačná korespondence mezi body a vektory:  $X = O + \mathbf{x}$ .

5) *Vzdálenost bodů*  $X, Y$ :  $\|\overrightarrow{XY}\| = \|Y - X\|$ .

Základní vlastnosti normy:

- $\|\mathbf{x}\| > 0$  pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  ( $\|\mathbf{o}\| = 0$ ),
- $\|a \cdot \mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$ ,
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (trojúhelníková nerovnost).

Další vlastnosti:

- $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$  (Schwarzova nerovnost pro eukl. normu),
- $\max_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ .

Důkaz (2). Odmocníme

$$\max_{i=1, \dots, n} x_i^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq n \cdot \max_{i=1, \dots, n} x_i^2$$

### Poznámky.

*Supremová norma*:  $\|\mathbf{x}\|_M = \sup\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$ .

*Součtová norma*:  $\|\mathbf{x}\|_S = |x_1| + \dots + |x_n|$ .

Všechny normy jsou ekvivalentní:

$$\|\mathbf{x}\|_M \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_S \leq n \cdot \|\mathbf{x}\|_M.$$

**Definice.** *Diametr (průměr)* neprázdné množiny  $M \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\text{diam}(M) = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}.$$

**Poznámka.**  $\text{diam}(\emptyset) = 0$ .

**Definice.** Množina  $M \subset \mathbb{R}^n$  se nazývá *omezená*, má-li konečný diametr.

**Poznámka.** Množina je omezená právě tehdy, když jsou omezené vzdálenosti jejích bodů od počátku, tj. omezené jsou množiny všech souřadnic.

**Definice.**  $\varepsilon$ -okolí bodu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$U(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\}.$$

*Prstencové  $\varepsilon$ -okolí bodu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :*

$$P(\mathbf{x}, \varepsilon) = U(\mathbf{x}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\}.$$

**Definice.** Necht  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že  $\mathbf{x}$  je

- vnitřní bod*  $M$ , pokud existuje okolí  $U(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset M$ ,
- vnější bod*  $M$ , pokud existuje okolí  $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$  disjunktní s  $M$  (tj.  $M \subset \mathbb{R}^n \setminus M$ ),
- hraniční bod*  $M$ , pokud každé okolí bodu  $\mathbf{x}$  má neprázdný průnik s  $M$  i s  $(\mathbb{R}^n \setminus M)$ ,
- hromadný bod*  $M$ , pokud každé prstencové okolí bodu  $\mathbf{x}$  má neprázdný průnik s  $M$ ,
- izolovaný bod*  $M$ , pokud existuje prstencové okolí bodu  $\mathbf{x}$  disjunktní s  $M$ .

**Definice.** Necht  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

- Vnitřek*  $M$  ( $M^0$ ) je množina všech vnitřních bodů  $M$ .
- Hranice*  $M$  ( $\partial M$ ) je množina všech hraničních bodů  $M$ .
- Uzávěr*  $M$  ( $\overline{M}$ ) je  $M^0 \cup \partial M$ .

**Definice.** Množina  $M \subset \mathbb{R}^n$  se nazývá

- otevřená*, je-li rovna svému vnitřku,
- uzavřená*, je-li rovna svému uzávěru.

### Poznámky.

- Množina nemusí být ani otevřená, ani uzavřená.
- Otevřená a zároveň uzavřená (tzv. obojetné) množiny v  $\mathbb{R}^n$  jsou pouze  $\emptyset$  a  $\mathbb{R}^n$ .
- Jednobodové množiny jsou uzavřené.
- Množina je otevřená právě tehdy, když její doplněk je uzavřená množina.
- Průnik dvou a sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina.
- Sjednocení dvou a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

**Věta.** Každá omezená nekonečná množina v  $\mathbb{R}^n$  má alespoň jeden hromadný bod.

Důkaz (návod). Podobně jako princip vnořených intervalů.

**Definice.** Množina  $M \subset \mathbb{R}^n$  se nazývá *souvislá*, jestliže neexistují otevřené množiny  $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}^n$  takové, že:

- $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ,
- $O_1 \cup O_2 \supset M$ ,
- $O_1 \cap M, O_2 \cap M \neq \emptyset$ .

### Poznámky.

- $\emptyset$  a  $\mathbb{R}^n$  jsou souvislé.
- Jednobodové množiny jsou souvislé.
- Otevřená množina není souvislá právě tehdy, když je sjednocením dvou disjunktních otevřených množin.
- V  $\mathbb{R}$  jsou souvislé  $\emptyset$ , jednobodové množiny, intervaly (nic jiného).

**Věta.** Otevřená množina v  $\mathbb{R}^n$  je souvislá právě tehdy, když každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v této množině.

**Definice.** Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*.

## Posloupnosti v $\mathbb{R}^n$

**Definice.** Posloupnost v  $\mathbb{R}^n$  je zobrazení  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1. \text{ člen } \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n \\ 2 &\mapsto 2. \text{ člen } \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$$

**Definice.** Posloupnost  $(\mathbf{x}_k)$  má limitu  $\mathbf{x}$ , pokud pro každé okolí  $U$  bodu  $\mathbf{x}$  existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro každé  $k > k_0$  je  $\mathbf{x}_k \in U$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k \in U(\mathbf{x}, \varepsilon) \dots \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \dots \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0 \end{aligned}$$

**Věta** (o konvergenci po složkách). Necht'  $(\mathbf{x}_k)$  je posloupnost v  $\mathbb{R}^n$ . Pak  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$  právě tehdy, když

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = x_i \quad \text{pro každé } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Důkaz. ( $k \rightarrow \infty$ )

$$\begin{array}{ccc} \max_i |x_{k,i} - x_i| & \leq & \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leq \sqrt{n} \max_i |x_{k,i} - x_i| \\ \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \Leftarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

**Důsledek.** Věty o limitě součtu, rozdílu, násobku, vybrané posloupnosti, jednoznačnosti, ... platí i v  $\mathbb{R}^n$ .

## Funkce v $\mathbb{R}^n$

**Definice.** (Reálná) funkce  $n$  (reálných) proměnných je zobrazení  $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D(f) \subset \mathbb{R}^n$  je definiční obor funkce  $f$ .  $R(f) = f(D(f))$  je obor hodnot funkce  $f$ .

**Poznámky.**

- 1) V prostorech „malé“ dimenze místo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  píšeme  $(x, y)$ ,  $(x, y, z)$ , ...
- 2) Vypouštíme „opakované“ závorky – místo  $f((x_1, \dots, x_n))$  píšeme  $f(x_1, \dots, x_n)$ .
- 3) Pod pojmem funkce rozumíme reálnou funkci  $n$  proměnných.

**Definice.** Graf funkce  $f$  je množina

$$\text{Graf } f = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in D(f), y = f(\mathbf{x})\}.$$

**Definice.** Hladina konstantnosti funkce  $f$  příslušná  $c \in \mathbb{R}$ :

$$\{\mathbf{x} \in D(f) : f(\mathbf{x}) = c\} = f^{-1}(c).$$

Řez grafu je průnik grafu s rovinou v  $\mathbb{R}^{n+1}$  rovnoběžnou s poslední osou.

**Definice.** Necht'  $M \subset D(f)$ . Funkce  $f$  má v bodě  $\mathbf{a}$  limitu  $b$  vzhledem k  $M$ , jestliže  $\mathbf{a}$  je hromadný bod  $M$  a pro každé okolí  $U$  bodu  $b$  existuje prstencové okolí  $P$  bodu  $\mathbf{a}$  tak, že  $f(P \cap M) \subset U$ . Píšeme

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in M}} f(\mathbf{x}) = b.$$

(Je-li  $M = D(f)$ , pak podmínku  $\mathbf{x} \in M$  nepíšeme.)

**Příklad.**  $n = 1$ ,  $M = (a, \infty)$  ... limita zprava.

**Věta.** Je-li  $\mathbf{a}$  hromadný bod  $D(f)$ , pak  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$  právě tehdy, když  $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in M}} f(\mathbf{x}) = b$  pro všechny  $M \subset D(f)$  takové, že  $\mathbf{a}$  je hromadný bod  $M$ .

**Příklady.**

- 1)  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} = \frac{k^2}{1+k^4}$
- 2)  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ ,  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ,  
 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$

**Definice.** Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $\mathbf{a} \in D(f)$ , jestliže  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ . Funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

**Poznámka.** Věty o limitách a spojitosti se dají zobecnit z  $n = 1$ . (Jednoznačnost limity, limita a spojitost součtu, rozdílu, součinu, podílu, složené funkce, ...)

**Definice.** Vektorová funkce je zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^k$ .

$$\begin{aligned} F: D(F) &\rightarrow \mathbb{R}^k, D(F) \subset \mathbb{R}^n \\ F(x_1, \dots, x_n) &= (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, \dots, x_n)) \\ F &= (F_1, \dots, F_k) \end{aligned}$$

Podobně jako pro posloupnosti vyšetřujeme limity (a tedy i spojitost) „po složkách“, tj. limity (a spojitost)  $F_1, \dots, F_k$ .

## Derivace funkcí více proměnných

**Definice.** *Parciální derivace funkce  $f(\mathbf{x})$  podle  $x_i$  v bodě  $\mathbf{a} \in D(f)$ :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \varphi'(a_i)$$

pro  $\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ .

**Příklad.**  $f(x, y) = e^x + x^2y$ ,  $\mathbf{a} = (1, 2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = e + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1$$

**Definice.** *Gradient funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a} \in D(f)$ :*

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

**Příklad.**  $f(x, y) = e^x + x^2y$

$$\text{grad } f(x, y) = (e^x + 2xy, x^2), \quad \text{grad } f(1, 2) = (e + 4, 1)$$

**Poznámka.**  $(\text{grad } f): \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mapsto \text{grad } f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$  je vektorová funkce

$$\begin{aligned} (\text{grad } f)(\mathbf{a}) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\mathbf{a}) \\ \text{grad } f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f \\ \text{grad} &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \nabla \quad (\text{nabla}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(a_i + t) - \varphi(a_i)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t}$$

**Definice.** *Derivace funkce  $f$  ve směru  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  v bodě  $\mathbf{a} \in D(f)$ :*

$$f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

**Příklad.**  $f(x, y) = e^x + x^2y$ ,  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{h} = (-1, 3)$

$$f'_{(-1,3)}(1, 2) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t}(e^{1-t} - e) - 1 - 4t + 3t^2 \right) = -e - 1$$

**Poznámky.**

- 1) Parciální derivace je směrová:  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{\mathbf{e}_i}$ .
- 2) Někdy se uvažují jen jednotkové vektory  $\mathbf{h}$ :  $\|\mathbf{h}\| = 1$ .
- 3)  $f'_{\mathbf{0}}(\mathbf{a}) = 0$ .
- 4)  $f'_{c\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = c \cdot f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})$ .
- 5)  $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ :  $f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$ .

**Věta.** *Nechť  $\mathbf{a}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  a existují  $f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}), g'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})$ . Pak*

- 1)  $(f + g)'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) + g'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})$ ,
- 2)  $(f \cdot g)'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})$ ,
- 3)  $\left( \frac{f}{g} \right)'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \frac{f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot g'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2} \quad (g(\mathbf{a}) \neq 0)$ .

Důkaz. Přepisem do jedné proměnné.

**Věta.** *Nechť  $\mathbf{a}$  je vnitřní bod  $D(f)$ , parciální derivace  $f$  existují v některém okolí  $\mathbf{a}$  a jsou v tomto bodě spojité (tj. grad  $f$  je spojité v  $\mathbf{a}$ ). Pak*

$$f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}.$$

**Příklad.**  $f(x, y) = e^x + x^2y$ ,  $\text{grad } f(1, 2) = (e + 4, 1)$

$$f'_{(-1,3)}(1, 2) = (e + 4, 1) \cdot (-1, 3) = -e - 1$$

**Příklad.** Předpoklad o spojitosti nelze vypustit.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

$$\text{grad } f(0, 0) = (0, 0) \quad (f(x, 0) = f(0, y) = 0)$$

$$f'_{(1,1)}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0,5 - 0}{t} \text{ neexistuje}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=2x}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{25x} \text{ neexistuje}$$

**Věta (Lagrange).** *Nechť  $I \subset D(f)$  je úsečka s krajními body  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ ,  $f$  je spojitá na  $I$  a má v každém bodě  $I \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  derivaci ve směru  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Pak existuje  $\alpha \in (0, 1)$  tak, že*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{b}-\mathbf{a}}(\mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})).$$

Důkaz.  $f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \varphi(t)$ ,  $t \in (0, 1)$

$$f(\mathbf{a}) = \varphi(0), \quad f(\mathbf{b}) = \varphi(1), \quad f'_{\mathbf{b}-\mathbf{a}}(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \varphi'(t)$$

$$\text{Lagrange } n = 1: \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\alpha)(1 - 0) = \varphi'(\alpha)$$

**Poznámka.** Bod  $\mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  leží uvnitř úsečky  $I$ .

**Příklad.**  $f(x, y) = 1$  na  $\{(x, y): y = x^2, x \neq 0\}$ , jinak  $0$   
 $f'_{\mathbf{h}}(0, 0) = 0$ ,  $f$  není spojitá v  $(0, 0)$

lineární aproximace přírůstku:  $f(a+h) - f(a) = k \cdot h + \omega(h)$

$$\frac{\omega(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a) - kh}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = f'(a) - k \dots \text{nejlepší pro } k = f'(a)$$

nejlepší lineární aproximace  $L(h) = f'(a)h$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{h} = 0$$

**Definice.** *(Totální) diferenciál funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  (vnitřní bod  $D(f)$ ) je lineární zobrazení  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , pro které platí*

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Pokud existuje, říkáme, že  $f$  je *diferencovatelná* v bodě  $\mathbf{a}$ .

**Poznámky.** 1) Značení:  $df(\mathbf{a})(\mathbf{h})$ ,  $df(\mathbf{a})[\mathbf{h}]$ ,  $df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ .

2)  $df(\mathbf{a})$  je lineární zobrazení:

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = k_1 h_1 + \dots + k_n h_n$$

$$df(\mathbf{a}) = k_1 dx_1 + \dots + k_n dx_n = (k_1, \dots, k_n) \cdot d\mathbf{x}$$

**Příklad.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $df(1, 1)(h_1, h_2) = 2h_1 + 2h_2$ .

**Poznámky.** 1) Je-li  $f$  lineární, pak  $df(\mathbf{a}) = f$ .

2)  $n = 1$ :  $df(a)(h) = f'(a)h$ ,  $df(a)$  s  $f'(a)$  ztotožňujeme.

3) Pro vektorovou funkci  $F = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  je  $dF = (df_1, \dots, df_n)$ , tj.:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - dF(\mathbf{a})(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Věty o derivacích

**Věta.** Má-li funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  totální diferenciál, pak má v  $\mathbf{a}$  všechny směrové derivace a platí (pro každé  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ )

$$f'_h(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}.$$

Důkaz. 1)  $\mathbf{h} = \mathbf{o}$ :  $f'_o(\mathbf{a}) = 0 = df(\mathbf{a})(\mathbf{o})$

$\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$ :  $t \rightarrow 0 \iff t\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}$ :

$$\begin{aligned} f'_h(\mathbf{a}) - df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - t df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{t} \\ &= \lim_{t\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \underbrace{\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - df(\mathbf{a})(t\mathbf{h})}{\pm \|t\mathbf{h}\|}}_{\rightarrow 0} \cdot \|\mathbf{h}\| = 0 \end{aligned}$$

2)  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  standardní ortonormální báze  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) &= df(\mathbf{a})(h_1\mathbf{e}_1 + \dots + h_n\mathbf{e}_n) \\ &= h_1 df(\mathbf{a})(\mathbf{e}_1) + \dots + h_n df(\mathbf{a})(\mathbf{e}_n) \\ &\stackrel{1)}{=} h_1 f'_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{a}) + \dots + h_n f'_{\mathbf{e}_n}(\mathbf{a}) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ &= \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} \end{aligned}$$

**Poznámka.** Stručné zápisy:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a}) &= \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot d\mathbf{x} \\ df &= d\mathbf{x} \cdot \text{grad } f \\ d &= d\mathbf{x} \cdot \text{grad} \end{aligned}$$

**Poznámka.** Je-li  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineární, pak existuje matice  $\mathbf{A}$  typu  $(k, n)$  tak, že

$$A(\mathbf{x})^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T.$$

Diferenciál  $df(\mathbf{a})$  má za matici  $\text{grad } f(\mathbf{a})$ .

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h})^{(T)} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Pro vektorovou funkci  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $F = (f_1, \dots, f_k)$  máme diferenciály po souřadnicích:

$$\begin{aligned} dF(\mathbf{a})(\mathbf{h}) &= (df_1(\mathbf{a})(\mathbf{h}), \dots, df_k(\mathbf{a})(\mathbf{h})) \\ dF(\mathbf{a})(\mathbf{h})^T &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}}_{\text{Jacobiho matice } F \text{ v } \mathbf{a}} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Příklad.**  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (x^2 + xy, 2x + 5y)$

$$dF(x, y) \sim \begin{pmatrix} 2x + y & x \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$dF(1, 1)(h_1, h_2)^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3h_1 + h_2 \\ 2h_1 + 5h_2 \end{pmatrix}$$

$$dF(1, 1)(h_1, h_2) = (3h_1 + h_2, 2h_1 + 5h_2)$$

**Věta.** Má-li funkce v některém bodě diferenciál, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz.  $\|df(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| = \|\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}\| \leq \|\text{grad } f(\mathbf{a})\| \cdot \|\mathbf{h}\|$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} [f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})] &= \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \left[ \underbrace{\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}}_{\rightarrow 0} \cdot \|\mathbf{h}\| + \underbrace{df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}_{\rightarrow 0} \right] = 0. \end{aligned}$$

**Věta.** Má-li funkce v některém vnitřním bodě svého definičního oboru spojitě parciální derivace (tj. spojitý gradient), pak má v tomto bodě diferenciál.

Důkaz. Ověříme, že  $\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$  je diferenciál:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} &= \\ &= [f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n)] + \\ &\quad + [f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n + h_n)] + \dots \\ &\quad + [f(a_1, a_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)] - \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\mathbf{h})) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\mathbf{h})) h_n - \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) h_1 - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) h_n \\ &= \|\mathbf{h}\| \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{h})) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right]}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{h_i}{\|\mathbf{h}\|}}_{\in \langle -1, 1 \rangle} \end{aligned}$$

**Důsledek.** Jsou-li parciální derivace spojitě na otevřené množině, pak diferenciál existuje v každém bodě této množiny.

**Poznámky.**

1) Parciální derivace v okolí, spojitě v bodě  $\Rightarrow$  diferenciál v bodě  $\Rightarrow$  všechny směrové derivace v bodě.

2) Podmínka spojitosti parciálních derivací není nutná.

**Příklad.**  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$  pro  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$

diferenciál  $df(0, 0)(h_1, h_2) = 0$  existuje

limita  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$  neexistuje

**Věta.** Funkce, která má v oblasti  $G \subset \mathbb{R}^n$  nulové všechny parciální derivace, je v této oblasti konstantní.

Důkaz. Zvolme  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ , existuje čára  $L \subset G$  z  $\mathbf{x}$  do  $\mathbf{y}$  složená z úseček, BÚNO z jedné, existuje  $\mathbf{z} \in L$ :

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = f'_{\mathbf{y}-\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \text{grad } f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{o} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0.$$

**Důsledek.** Funkce se stejnými parciálními derivacemi v oblasti se v této oblasti liší o konstantu.

**Příklad.**  $f(x, y) = \arctg x + \arctg y$

$$g(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}, \quad xy \neq 1$$

$$\text{grad } f(x, y) = \left( \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2} \right) = \text{grad } g(x, y)$$

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{pro } xy < 1$$

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy} + \pi \quad \text{pro } xy > 1, x > 0$$

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy} - \pi \quad \text{pro } xy > 1, x < 0$$



## Interpretace a aplikace

### Směr největšího spádu

pro  $\|\mathbf{h}\| = 1$  je (Schwarzova nerovnost):

$|f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})| = |\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}| \leq \|\text{grad } f(\mathbf{a})\| \cdot \|\mathbf{h}\| = \|\text{grad } f(\mathbf{a})\|$   
 rovnost nastane, pokud jsou  $\mathbf{h}$  a  $\text{grad } f(\mathbf{a})$  lineárně závislé,  
 tj. v případě  $\text{grad } f(\mathbf{a}) \neq 0$  pro jednotkové vektory:

$$\mathbf{h}_{\max} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a})}{\|\text{grad } f(\mathbf{a})\|}, \quad \mathbf{h}_{\min} = -\mathbf{h}_{\max}.$$

### Tečná nadrovina a normála grafu

tečná nadrovina (lineární aproximace) v  $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ :

$$y = f(\mathbf{a}) + \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} - y = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} - f(\mathbf{a})$$

$$(\text{grad } f(\mathbf{a}), -1) \cdot (\mathbf{x}, y) = (\text{grad } f(\mathbf{a}), -1) \cdot (\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$$

$(\text{grad } f(\mathbf{a}), -1)$  je normálový vektor

### Lineární aproximace

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

**Příklad.** Aproximujte  $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$  v okolí  $(0, 0)$ .

$$\text{grad } f(x, y) = \left( \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2} \right), \quad \text{grad } f(0, 0) = (1, 1)$$

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + (1, 1) \cdot (x, y) = x + y$$

## Derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů:

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x}) \dots \text{řádu } k$$

smíšená: alespoň 2 proměnné různé

**Poznámka.** Pořadí derivování nelze vždy zaměnit.

**Příklad.**

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 1$$

**Věta.** Je-li  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  spojitá na otevřené množině  $G$ , pak na  $G$  platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

**Věta.** Existují-li  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  v okolí bodu  $\mathbf{a}$  a jsou-li spojitě v  $\mathbf{a}$ , pak jsou v tomto bodě stejné.

**Příklad.**  $f(x, y) = e^{xy^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

**Definice.** Necht  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $k \in \mathbb{N}$ . Funkce  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  se nazývá třídy  $C^k$  na  $G$  ( $f \in C^k(G)$ ), jestliže všechny parciální derivace řádu  $k$  jsou na  $G$  spojitě.

**Poznámky.**

1)  $C^0 \dots$  spojitě funkce

2)  $C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots$

3)  $\bigcap_{k=1}^{\infty} C^k = C^{\infty}$

**Důsledek.** Je-li  $f \in C^k(G)$ , pak parciální derivace do řádu  $k$  na  $G$  nezávisí na pořadí derivování.

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{h} \cdot \text{grad})f(\mathbf{a})$$

$$d \rightarrow \mathbf{h} \cdot \text{grad} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$d^2 \rightarrow (\mathbf{h} \cdot \text{grad})^2 = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$d^3 \rightarrow (\mathbf{h} \cdot \text{grad})^3 = \sum_{i,j,k=1}^n h_i h_j h_k \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

...

**Poznámky.**

1) Pro  $n = 1$  je  $d^k f(a)(h) = f^{(k)}(a) h^k$ .

2) Pro  $f(x, y)$  se spojitými parciálními derivacemi:

$$d^2 \rightarrow h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$d^3 \rightarrow h_1^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + h_2^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

...

3)

$$d^2 \rightarrow (h_1, \dots, h_n) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}}_{\text{Hessova matice}} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

**Příklad.** Pro  $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$ ,  $D(f) = (0, \infty) \times \mathbb{R}$  je  $d^2 f(1, 2)(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_1 h_2$ .

### Taylorův polynom

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(k+1)}(a+\alpha h)}{(k+1)!}h^{k+1}$$

**Věta** (o Taylorově polynomu). Je-li funkce  $f$  třídy  $C^{k+1}$  na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$  obsahující úsečku s krajními body  $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}$ , pak existuje  $\alpha \in (0, 1)$  tak, že platí

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + d f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{d^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{2!} + \dots + \frac{d^{(k)} f(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{k!} + \frac{d^{(k+1)} f(\mathbf{a} + \alpha \mathbf{h})(\mathbf{h})}{(k+1)!}.$$

#### Poznámky.

1)  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a}$  (Taylorův polynom).

2) Pro  $k = 0$  dostáváme Lagrangeovu větu:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{h} \cdot \text{grad } f(\mathbf{a} + \alpha \mathbf{h}) = f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a} + \alpha \mathbf{h}).$$

**Příklad.** Pomocí Taylorova polynomu odhadněte  $1,05^{3,02}$ .

$$f(x, y) = x^y, \mathbf{a} = (1, 3), \mathbf{h} = (0,05; 0,02),$$

$$(\mathbf{h} \cdot \text{grad})f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} = h_1 y x^{y-1} + h_2 x^y \ln x = 3h_1,$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \cdot \text{grad})^2 f &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \\ &= h_1^2 y(y-1)x^{y-2} + 2h_1 h_2 x^{y-1}(1+y \ln x) + h_2^2 x^y \ln^2 x = \\ &= 6h_1^2 + 2h_1 h_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &\approx f(\mathbf{a}) + (\mathbf{h} \cdot \text{grad})f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{h} \cdot \text{grad})^2 f(\mathbf{a}) = \\ &= 1 + 3h_1 + 3h_1^2 + h_1 h_2 = 1,1585 \quad (1,05^{3,02} = 1,1587\dots) \end{aligned}$$

### Derivace složené funkce

$$n = 1: \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

**Věta.** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^n, H \subset \mathbb{R}^k$  jsou otevřené množiny,  $F: G \rightarrow H$  má diferenciál v bodě  $\mathbf{a} \in G, g: H \rightarrow \mathbb{R}$  má diferenciál v bodě  $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$ . Pak funkce  $(g \circ F)$  má v bodě  $\mathbf{a}$  diferenciál a platí

$$d(g \circ F)(\mathbf{a}) = dg(\mathbf{b}) \circ dF(\mathbf{a}).$$

#### Poznámky.

1) Složení lineárních zobrazení je lineární.

2) Matice složeného zobrazení je součinem matic ( $F = (f_1, \dots, f_k)$ ):

$$dg(\mathbf{b}) \sim \text{grad } g(\mathbf{b})$$

$$dF(\mathbf{a}) \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(\mathbf{a}) &\sim \text{grad } g(\mathbf{b}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \\ &= (\text{grad } g(\mathbf{b}) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \text{grad } g(\mathbf{b}) \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})). \end{aligned}$$

3) Lze i pro vektorovou funkci  $g$ .

4) Pro  $n = k = 1$  dostaneme násobení čísel (derivací).

**Příklad.** Určete diferenciál  $f(x, y) = g(e^{xy}, e^{-xy}), g \in C^1$ . Pro  $(e^{xy}, e^{-xy}) = (u, v) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = F(x, y)$  je  $f = g \circ F$

$$dg(x, y) \sim \left( \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v} \right)$$

$$dF(x, y) \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y e^{xy} & x e^{xy} \\ -y e^{-xy} & -x e^{-xy} \end{pmatrix}$$

$$df(x, y) \sim (y e^{xy} \frac{\partial g}{\partial u} - y e^{-xy} \frac{\partial g}{\partial v}, x e^{xy} \frac{\partial g}{\partial u} - x e^{-xy} \frac{\partial g}{\partial v})$$

**Věta.** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^n, H \subset \mathbb{R}^k$  jsou otevřené množiny,  $F: G \rightarrow H$  má v bodě  $\mathbf{a} \in G$  derivaci ve směru  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, g: H \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$  diferenciál. Pak funkce  $(g \circ F)$  má v bodě  $\mathbf{a}$  derivaci ve směru  $\mathbf{h}$  a platí

$$(g \circ F)'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = dg(\mathbf{b})(F'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})).$$

Důkaz (pokud  $F$  má diferenciál).

$$\begin{aligned} (g \circ F)'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) &= d(g \circ F)(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = (dg(\mathbf{b}) \circ dF(\mathbf{a}))(\mathbf{h}) \\ &= dg(\mathbf{b})(dF(\mathbf{a})(\mathbf{h})) = dg(\mathbf{b})(F'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})) \end{aligned}$$

Pro parciální derivace dostáváme tzv. řetězové pravidlo (značíme  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, g(y_1, \dots, y_k)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \circ F)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \text{grad } g(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{b}), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{b}) \right) \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{b}) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{b}) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Někdy vypuštíme argumenty (uvažujeme  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ )

$$\frac{\partial (g \circ F)}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}.$$

Někdy se nerozlišuje  $f_i$  od  $y_i$  ( $f = g \circ F$ ):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

(Někdy se nerozlišuje ani  $g$  od  $f$ .)

**Příklad.** Určete parciální derivace  $f(x, y) = g(e^{xy}, e^{-xy})$ . Označme  $(e^{xy}, e^{-xy}) = (u, v)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y e^{xy} \frac{\partial g}{\partial u} - y e^{-xy} \frac{\partial g}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x e^{xy} \frac{\partial g}{\partial u} - x e^{-xy} \frac{\partial g}{\partial v}. \end{aligned}$$

**Příklad.** Pro  $f(x, y, z) = x g(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}), g \in C^1$  je  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = f$ .

## Transformace diferenciálních výrazů

$$f(x, y) \rightarrow g(u, v): x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow u, v, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$$

### I. Nové proměnné pomocí starých

$$f(x, y), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

Použijeme větu o derivaci složené funkce pro  $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$ , spočteme staré proměnné:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

**Příklad.**  $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{-x}{y^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 1 \end{aligned}$$

$x = uv$ ,  $y = v$ :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} - y \frac{\partial g}{\partial v} = 2u \frac{\partial g}{\partial u} - v \frac{\partial g}{\partial v}$$

### II. Staré proměnné pomocí nových

$$f(x, y), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

1. Přepočítáme  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  a použijeme I.

**Příklad.**  $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $x = uv$ ,  $y = v$ :  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = y$

2. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro  $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ , spočítáme parciální derivace  $f$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x} &= \dots \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial y} &= \dots \end{aligned}$$

**Příklad.**  $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $x = uv$ ,  $y = v$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 & \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{u}{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \end{aligned}$$

3. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro  $f$ , parciální derivace nových proměnných podle starých spočítáme z derivací transformačních rovnic.

**Příklad.**  $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $x = uv$ ,  $y = v$   
derivacemi transformačních rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} & 0 &= \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} & 1 &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{u}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{aligned}$$

**Věta.** Jacobiho matice inverzních vektorových funkcí jsou k sobě inverzní. (Pro regulární, tj. s nenulovým determinan-tem Jacobiho matice.)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \left( \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \left( \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v} \right) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Poznámka.** Je to zobecnění věty o derivaci inverzní funkce jedné proměnné.

4. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro  $f$ , parciální derivace nových proměnných podle starých spočítáme invertováním Jacobiho matice inverzní transformace.

**Příklad.**  $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $x = uv$ ,  $y = v$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & 0 \\ -\frac{u}{v} & 1 \end{pmatrix}$$

**Příklad.**  $\sqrt{1-x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ,  $x = \sin u$ ,  $y = v$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \frac{1}{\cos u} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial g}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial g}{\partial u} + g \right) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} + g &= \varphi(u) \\ g(u, v) &= c_1(v) e^{-u} + c_2(u) \\ f(x, y) &= c_1(y) e^{\arcsin x} + \bar{c}_2(x) \end{aligned}$$

**Příklad.**  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \left( \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi \partial r} \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r^2} \right) \cos \varphi \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi \partial r} \cos \varphi - \frac{\partial g}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial g}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \end{aligned}$$

## Lokální extrémů funkcí více proměnných

$f$  má v  $\mathbf{a}$

lokální minimum:  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$  na některém  $P(\mathbf{a})$

lokální maximum:  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$  na některém  $P(\mathbf{a})$

lokální extrém: lokální minimum nebo lokální maximum

ostrý lokální extrém (maximum, minimum): ostrá nerovnost

### Příklady.

1)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  má v  $(0, 0)$  ostré lokální minimum.

2)  $f(x, y) = x^2 y^2$  má v  $(0, 0)$  lokální minimum (neostré).

3)  $f(x, y) = xy$  nemá v  $(0, 0)$  lokální extrém.

**Poznámka.** Funkce  $f$  má v  $\mathbf{a}$  (ostré) lokální minimum právě tehdy, když funkce  $-f$  má v  $\mathbf{a}$  (ostré) lokální maximum.

**Věta.** Necht'  $f$  má v  $\mathbf{a}$  lokální extrém,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ . Pak  $f'_\mathbf{h}(\mathbf{a})$  je buď nulová nebo neexistuje.

Důkaz.  $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$

$f$  má v  $\mathbf{a}$  lokální extrém ...  $\varphi$  má v 0 lokální extrém

$f'_\mathbf{h}(\mathbf{a})$  existuje ...  $\varphi'(0) = f'_\mathbf{h}(\mathbf{a})$  existuje, je nulová

**Definice.** Bod  $\mathbf{a}$  nazýváme *stacionárním bodem* funkce  $f$ , jestliže všechny parciální derivace  $f$  jsou v  $\mathbf{a}$  nulové.

druhý diferenciál:  $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) h_i h_j$

**Definice.** Řekneme, že  $d^2f(\mathbf{a})$  je

pozitivně definitní, pokud  $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) > 0$  pro každý  $\mathbf{h} \neq 0$ ;

negativně definitní, pokud  $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) < 0$  pro každý  $\mathbf{h} \neq 0$ ;

indefinitní, pokud existují  $\mathbf{h}, \mathbf{k}$  tak, že  $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) < 0 < d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k})$ .

**Příklady.** (v  $\mathbb{R}^3$ )

1)  $h_1^2 + 2h_2^2 + 5h_3^2$  je pozitivně definitní

2)  $-2h_1^2 - h_2^2 - 4h_3^2$  je negativně definitní

3)  $h_1^2 + 2h_2^2 - h_3^2$  je indefinitní:  $(1, 1, 0) \mapsto 3, (0, 0, 1) \mapsto -1$

4)  $h_1^2 + h_2^2 \geq 0$  není nic z výše uvedeného:  $(0, 0, 1) \mapsto 0$  (pozitivně semidefinitní)

**Věta.** Necht'  $f$  je třídy  $C^2$  na otevřené množině  $G$ ,  $\mathbf{a} \in G$  je stacionární bod  $f$ . Pak platí:

(1) Je-li  $d^2f(\mathbf{a})$  pozitivně definitní, pak  $f$  má v  $\mathbf{a}$  ostré lokální minimum.

(2) Je-li  $d^2f(\mathbf{a})$  negativně definitní, pak  $f$  má v  $\mathbf{a}$  ostré lokální maximum.

(3) Je-li  $d^2f(\mathbf{a})$  indefinitní, pak  $f$  nemá v  $\mathbf{a}$  lokální extrém.

Důkaz (náznak). podle Taylorovy věty existuje  $t \in (0, 1)$ :

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{1}{2} d^2f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})(\mathbf{h}) =$$

$$= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} d^2f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})(\mathbf{h})$$

1) spojitě 2. derivace ... spojitý 2. diferenciál ... pozitivně definitní v okolí  $U(\mathbf{a})$  ... pro  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in P(\mathbf{a})$  je  $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) > f(\mathbf{a})$

2) podobně

3)  $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) < 0 < d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k})$ , ve směru  $\mathbf{h}$  je ostré lokální maximum, ve směru  $\mathbf{k}$  ostré lokální minimum ... není lokální extrém

**Poznámka.** V  $\mathbb{R}$  je  $d^2f(a)(h) = f''(a)h^2$ , definitnost je určena znaménkem.

**Příklady.**  $d^2f(0, 0)$  je nulový:

1)  $f(x, y) = x^2 y^2$  má v  $(0, 0)$  (neostré) lokální minimum.

2)  $f(x, y) = x^3 + y^3$  nemá v  $(0, 0)$  lokální extrém.

2)  $f(x, y) = x^4 + y^4$  má v  $(0, 0)$  ostré lokální minimum.

**Příklad.** Určete lokální extrémů  $f(x, y) = 3x^2 - 6xy - 2y^3$ .

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , lokální extrémů jsou ve stacionárních bodech

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x - 6y^2 = 0$$

stacionární body:  $(0, 0), (-1, -1)$

$$d^2f(x, y)(h_1, h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 - 12yh_2^2$$

$d^2f(0, 0)(h_1, h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 = 6[(h_1 - h_2)^2 - h_2^2]$  je indefinitní

$$d^2f(-1, -1)(h_1, h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 + 12h_2^2 = 6[(h_1 - h_2)^2 + h_2^2]$$
 je pozitivně definitní

Funkce  $f$  má ostré lokální minimum  $f(-1, -1) = -1$ .

Hessova matice funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Označme

$$D_k = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

**Věta** (Sylvestrovovo kritérium). Necht'  $f$  je třídy  $C^2$ .

1)  $d^2f(\mathbf{a})$  je pozitivně definitní právě když  $D_k > 0$  pro všechna  $k = 1, \dots, n$ .

2)  $d^2f(\mathbf{a})$  je negativně definitní právě když  $(-1)^k D_k > 0$  pro všechna  $k = 1, \dots, n$ .

3) Pokud  $D_n \neq 0$  a pokud nenastala ani jedna z předešlých možností, pak je  $d^2f(\mathbf{a})$  indefinitní.

**Příklad.**  $f(x, y) = 3x^2 - 6xy - 2y^3$  (viz výše).

Hessova matice:

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -12y \end{pmatrix}$$

ve stacionárních bodech

$$(0, 0): \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 6, \quad D_2 = -36$$

$$(-1, -1): \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 6, \quad D_2 = 36$$

**Příklad.**  $f(x, y, z) = 2y - 2z - y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 3xz - x^3$ .  
 gradient  $(3z - 3x^2, 2 - 2y, -2 - z + 3x)$   
 Hessova matice:

$$\begin{pmatrix} -6x & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ve stacionárních bodech

$$(1, 1, 1): \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D_1 = -6, D_2 = 12, D_3 = 6$$

$$(2, 1, 4): \begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D_1 = -12, D_2 = 24, D_3 = -6$$

ostré lokální maximum  $f(2, 1, 4) = 1$

## II. Lagrangeova metoda multiplikátorů

Předpoklady:  $G \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $f \in C^1(G)$ ,  
 $M: g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_p(\mathbf{x}) = 0, p < n, g_1 \dots g_p \in C^1(G)$ ,  
 grad  $g_1(\mathbf{x}), \dots, \text{grad } g_p(\mathbf{x})$  jsou lineárně nezávislé na  $M$ :

$$\text{hod} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = p$$

(grad  $g_i(\mathbf{x})$  je normálový vektor nadplochy dané rovnicí  $g_i(\mathbf{x}) = 0$  v  $\mathbf{x}$ , tj. tyto nadplochy se protínají v útvaru dimenze  $n - p$ ).

Princip:  $f$  „neroste“ po  $M$ , tj. grad  $f$  je kolmý k  $M$ , tj. grad  $f$  je lineární kombinací normál nadploch, tj. pro „stacionární“ bod  $\mathbf{a}$  platí

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \text{grad } g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_p \text{grad } g_p(\mathbf{a}).$$

Postup:  $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \dots - \lambda_p g_p(\mathbf{x})$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0 & g_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0 & g_p(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

$n + p$  rovnic pro  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  dá stacionární body. Místo  $d^2f$  je účinnější vyšetřovat  $d^2F$ .

### Vázané extrémny

$f(\mathbf{x}), G \subset \mathbb{R}^n, M: g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots$  (vazby)

#### I. Snížení počtu proměnných

1. Vyjádření některých proměnných jako funkce jiných (řešení vazeb).

**Příklad.**  $f(x, y) = y - x^2, M: 2x - y = 0$   
 $y = 2x$   
 $g(x) = f(x, 2x) = 2x - x^2$   
 $g(1) = 1$  ostré lokální maximum  
 $f(1, 2) = 1$  ostré lokální maximum vzhledem k  $M$

2. Vyjádření některých proměnných jako funkce nových (parametrizace).

**Příklad.**  $f(x, y) = x + y + 1, M: x^2 + 2x + y^2 = 0$   
 $M: (x + 1)^2 + y^2 = 1$ , kružnice: střed  $(-1, 0)$ , poloměr 1  
 $M: x = -1 + \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$   
 $g(t) = f(-1 + \cos t, \sin t) = \cos t + \sin t$   
 $g(-1 + \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$  ostré lokální maximum  
 $g(-1 + \sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$  ostré lokální minimum  
 $f(-1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$  ostré lok. max. vzhledem k  $M$   
 $f(-1 - \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$  ostré lok. min. vzhledem k  $M$

**Poznámka.** První postup je zvláštním případem druhého.

**Příklad.**  $f(x, y) = x + y + 1, M: g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$   
 grad  $g(x, y) = (2x + 1, 2y) = \mathbf{0}$  v  $(-\frac{1}{2}, 0) \notin M$   
 $F(x, y) = x + y + 1 - \lambda(x^2 + 2x + y^2)$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial x}: & 1 - \lambda(2x + 2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}: & 1 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ & x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{array}$$

$(x_1, y_1) = (-1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \lambda_1 = \sqrt{2}/2$   
 $(x_2, y_2) = (-1 - \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), \lambda_2 = -\sqrt{2}/2$   
 $d^2f(x_i, y_i)(\mathbf{h}) = 0$  extrémny neurčí  
 $d^2F(x, y)(\mathbf{h}) = -2\lambda h_1^2 - 2\lambda h_2^2:$

$f(x_1, y_1) = \sqrt{2}$  ostré lokální maximum vzhledem k  $M$   
 $f(x_2, y_2) = -\sqrt{2}$  ostré lokální minimum vzhledem k  $M$

**Poznámka.** Definitnost  $d^2f$  ( $d^2F$ ) stačí vyšetřovat na tečném prostoru, tj. pro vektory  $\mathbf{h}$  splňující

$$\begin{array}{l} \mathbf{h} \cdot \text{grad } g_1(\mathbf{a}) = 0, \\ \vdots \\ \mathbf{h} \cdot \text{grad } g_p(\mathbf{a}) = 0, \end{array} \quad \begin{pmatrix} \text{grad } g_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad } g_p(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = 0$$

(rovnice jsou podle podmínky lineárně nezávislé).

**Příklad.**  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $M: x + y - 1 = 0, y + z = 0$ .

**Funkce zadané implicitně**

$$\text{hod} \begin{pmatrix} \text{grad } g_1(x, y, z) \\ \text{grad } g_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \text{hod} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^3$$

$$F(x, y, z) = xyz - \lambda(x + y - 1) - \mu(y + z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} : & \quad yz - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} : & \quad xz - \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} : & \quad xy - \mu = 0 \\ & \quad x + y - 1 = 0 \\ & \quad y + z = 0 \end{aligned}$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0), \lambda_1 = \mu_1 = 0$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), \lambda_2 = -\frac{4}{9}, \mu_1 = \frac{2}{9}$$

$$d^2f(x, y, z)(\mathbf{h}) = 2zh_1h_2 + 2yh_1h_3 + 2xh_2h_3$$

1)  $d^2f(1, 0, 0)(\mathbf{h}) = 2h_2h_3$  je indefinitní (není to l. e. v  $\mathbb{R}^3$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad \rightarrow \quad h_2 = -h_1, \quad h_3 = h_1$$

$d^2f(1, 0, 0)(h_1, -h_1, h_1) = -2h_1^2$  je negativně definitní v  $h_1$

$f(1, 0, 0) = 0$  je vázané ostré lokální maximum

$$2) d^2f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})(\mathbf{h}) = -\frac{4}{3}h_1h_2 + \frac{4}{3}h_1h_3 - \frac{2}{3}h_2h_3$$

$d^2f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})(h_1, -h_1, h_1) = 2h_1^2$  je pozitivně definitní v  $h_1$

$f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$  je vázané ostré lokální minimum

**Maximum a minimum funkce**

absolutní/globální extrémů

**Věta.** Spojitá funkce na omezené uzavřené množině nabývá svého maxima i minima.

Postup:

- 1) Lokální extrémů uvnitř.
- 2) Vázané extrémů na hranici.

**Příklad.**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ ,  $M: x^2 + y^2 - 4x \leq 5$

1) Lokální extrémů uvnitř:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : & \quad 2x - 6 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} : & \quad 2y - 4 = 0 \end{aligned}$$

stacionární bod  $(3, 2) \in M$ ,  $f(3, 2) = -2$

2) Vázané extrémů na hranici:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 - \lambda(x^2 + y^2 - 4x - 5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} : & \quad 2x - 6 - \lambda(2x - 4) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} : & \quad 2y - 4 - \lambda(2y) = 0 \\ & \quad x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \end{aligned}$$

$$f(2 + 3/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5}) = 12 - 6\sqrt{5} \doteq -1,4$$

$$f(2 - 3/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5}) = 12 + 6\sqrt{5} \doteq 25,4$$

$$\max_M f = f(2 - 3/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5}) = 12 + 6\sqrt{5},$$

$$\min_M f = f(3, 2) = -2$$

$$F(x, y) = 0 \rightarrow y = f(x)$$

**Příklady.**

1)  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ : kružnice, pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  je:

$$y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

2)  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ :  $\emptyset$

3)  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$ : bod  $(1, -3)$

4)  $|xy| - xy = 0$ :  $\langle 0, \infty \rangle^2 \cup (-\infty, 0)^2$

**Věta.** Necht'  $F(x, y)$  je funkce třídy  $C^1$  v okolí  $(a, b)$ ,  $F(a, b) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Pak existuje okolí  $U$  bodu  $a$  a funkce  $f \in C^1(U)$  tak, že  $f(a) = b$ ,  $F(x, f(x)) = 0$  na  $U$

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad \text{na } U.$$

**Poznámka.** Je-li  $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \neq 0$ , pak  $x = g(y)$  v okolí  $b$ .

Důkaz (druhé části). Derivací  $F(x, f(x)) = 0$  podle  $x$  dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0.$$

**Poznámka.** Derivace vyšších řádů (je-li  $F$  patřičné třídy  $C^k$ ) dostaneme dalším derivováním, například:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f' + (\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f') f' + \frac{\partial F}{\partial y} f'' = 0$$

**Příklad.** Určete lokální extrémů funkce  $y(x)$  dané implicitně rovnicí  $x^2 + y^2 = 1$ .

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y$  je nenulové pro  $y \neq 0$ .

derivací rovnice  $x^2 + y^2(x) - 1 = 0$  podle  $x$  dostaneme

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0, \quad y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

stacionární body  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$

druhou derivací rovnice podle  $x$  dostaneme ( $y'(x) = 0$ )

$$2 + 2y''(x) + 2y(x)y''(x) = 0, \quad y''(x) = -\frac{1}{y(x)}$$

$(0, 1)$ :  $y_1''(0) = -1/2 < 0$ , ostré lokální maximum

$(0, -1)$ :  $y_2''(0) = 1/2 > 0$ , ostré lokální minimum

**Věta.** Necht'  $F(\mathbf{x}, y)$  je funkce třídy  $C^1$  v okolí  $(\mathbf{a}, b)$ ,  $F(\mathbf{a}, b) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$ . Pak existuje okolí  $U$  bodu  $\mathbf{a}$  a funkce  $f \in C^1(U)$  tak, že  $f(\mathbf{a}) = b$ ,  $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$  na  $U$

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = -\left( \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}, \dots, \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))} \right) \quad \text{na } U.$$

**Poznámka.**  $\text{grad } F(\mathbf{x}, y)$  je normálový vektor nadplochy dané rovnicí  $F(\mathbf{x}, y) = 0$ , tj. grafu implicitně zadané funkce. Speciálně pro  $z = f(x, y)$  a  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$  je

$$\text{grad } F = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = (\text{grad } f, -1)$$

**Věta.** Necht'  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ( $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ) jsou funkce třídy  $C^1$  v okolí  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  a

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \frac{\partial F}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \frac{\partial G}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \frac{\partial G}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí  $U$  bodu  $\mathbf{a}$  a funkce  $f, g \in C^1(U)$  tak, že  $(f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})) = \mathbf{b}$  a  $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) = G(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) = 0$  na  $U$ .

**Příklad.** Ověřte, že rovnice  $x + y - u - v = 0, ux + vy - 2 = 0$  v okolí bodu  $(1, -1, 1, -1)$  definují funkce  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  v okolí bodu  $(1, -1)$ . Určete grad  $u(1, -1)$ .

Funkce  $F(x, y, u, v) = x + y - u - v, G(x, y, u, v) = ux + vy - 2$  jsou třídy  $C^1(\mathbb{R}^4)$ , bod  $(1, -1, 1, -1)$  vyhovuje podmínkám,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ x & y \end{pmatrix} = x - y$$

je v bodě  $(1, -1, 1, -1)$  nenulový.

Parciálními derivacemi rovnic podle  $x, y$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} : \quad & 1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \frac{\partial u}{\partial x}(-1, 1) + \frac{\partial v}{\partial x}(-1, 1) = 1 \\ & \frac{\partial u}{\partial x} x + u + \frac{\partial v}{\partial x} y = 0 & \frac{\partial u}{\partial x}(-1, 1) - \frac{\partial v}{\partial x}(-1, 1) = -1 \\ \frac{\partial}{\partial y} : \quad & 1 - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \frac{\partial u}{\partial y}(-1, 1) + \frac{\partial v}{\partial y}(-1, 1) = 1 \\ & \frac{\partial u}{\partial y} x + \frac{\partial v}{\partial y} y + v = 0 & \frac{\partial u}{\partial y}(-1, 1) - \frac{\partial v}{\partial y}(-1, 1) = 1 \end{aligned}$$

vyřešením: grad  $u(1, -1) = (0, 1)$

## Číselné řady

$$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \mathbb{R}^*$$

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

**Definice.** Necht'  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  je posloupnost čísel. (Nekonečná číselná) řada je výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Číslo  $a_k$  se nazývá  $k$ -tý člen této řady.

**Poznámka.** Obecněji:

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k, n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k \in M} a_k, M \text{ je množina: } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$$

**Definice.** Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  nazýváme  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$   $n$ -tý částečný součet řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , pak ji nazýváme součtem řady a píšeme  $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Řekneme, že řada:

konverguje, je-li  $s \in \mathbb{C}$ ;

diverguje, je-li  $s \in \{\pm\infty, \infty\}$ ;

osciluje, pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  neexistuje.

**Příklady.**

1)  $\sum_{k=1}^{\infty} 1$  diverguje:  $s_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ .

2)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  osciluje:  $s_n = 1$  pro  $n$  sudé,  $s_n = 0$  pro  $n$  liché.

3)  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2^{-n}) = 1$  konverguje.

4)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$  osciluje v  $\mathbb{R}$ , diverguje v  $\mathbb{C}$ :  $s_{2n-1} = n, s_{2n} = -n$ .

**Poznámka.** „Lepší“ sčítání je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$ , pro příklad 2) dá součet  $\frac{1}{2}$ .

**Definice.** Aritmetická řada s diferencí  $d$ :

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (a + (k-1)d).$$

Součty

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + a_n) + \frac{1}{2}(a_2 + a_{n-1}) + \dots + \frac{1}{2}(a_n + a_1) \\ &= \frac{1}{2}n(a_1 + a_n), \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \begin{cases} +\infty, & d > 0 \text{ nebo } d = 0, a > 0, \\ -\infty, & d < 0 \text{ nebo } d = 0, a < 0, \\ 0, & d = 0, a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Příklad.**  $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ .

**Definice.** Geometrická řada s kvocientem  $q$ :

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}.$$

Součty

$$\begin{aligned} s_n &= a(1 + q + \dots + q^{n-1}) \\ qs_n &= a(q + \dots + q^{n-1} + q^n) \\ (1 - q)s_n &= a(1 - q^n) \\ s_n &= \begin{cases} \frac{1 - q^n}{1 - q}, & q \neq 1 \\ na, & q = 1 \end{cases} \\ \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} &= \frac{a}{1 - q}, \quad |q| < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} &= \begin{cases} \infty, & q \geq 1, \\ \text{neex.}, & q \leq -1 \end{cases} \quad \text{v } \mathbb{R} \\ &= \begin{cases} \infty, & |q| > 1 \text{ nebo } q = 1, \\ \text{neex.}, & |q| = 1, q \neq 1 \end{cases} \quad \text{v } \mathbb{C} \end{aligned}$$

**Příklad.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$ .

**Příklad.**  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ .

**Věta.** Jestliže  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergují,  $c \in \mathbb{C}$ , pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

**Věta.** Komplexní řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje právě tehdy, když konvergují řady  $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ . Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k.$$

**Věta** (nutná podmínka konvergence). Jestliže  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje, pak  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

**Důkaz.**  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s - s = 0$ .

**Věta.** Je-li  $a_k \geq 0$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  existuje.

**Důkaz.**  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $(s_n)$  je neklesající, tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existuje ( $= \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$ )

## Kriteria konvergence

**Věta** (srovnávací kritérium). Necht'  $0 \leq a_k \leq b_k$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ .

- 1) Konverguje-li  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , pak i  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje.
- 2) Diverguje-li  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , pak i  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  diverguje.

**Důkaz.**  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, t_n = \sum_{k=1}^n b_k, 0 \leq s_n \leq t_n$   
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

**Příklady.**

- 1)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2$  konverguje.
- 2)  $\alpha \geq 2, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$  konverguje.
- 3) harmonická řada:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty.$$

- 4)  $\alpha \in (0, 1), \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverguje.

**Věta** (podílové kritérium). Necht'  $0 < a_k$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ . Je-li pro každé  $k \in \mathbb{N}$

- 1)  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje;
- 2)  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverguje.

**Důkaz.**

- 1)  $a_{k+1} \leq a_k q \dots \leq a_1 q^k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$
- 2)  $a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq a_1, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_1 = +\infty$

**Poznámka.** Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká  $k$ , tj. počínaje některým  $k_0$ .

**Věta** (limitní tvar podílového kritéria). Necht'  $0 \leq a_k$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ . Je-li

- 1)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje;
- 2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverguje.

**Příklady.**

- 1)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$  konverguje:  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$ .
- 2)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$  diverguje:  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{2} \rightarrow +\infty$ .
- 3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  - kr. nerozhodne:  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$  (diverguje).
- 4)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  - kr. nerozhodne:  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$  (konv.).

**Věta** (odmocninové kritérium). Necht'  $0 \leq a_k$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ . Je-li pro každé  $k \in \mathbb{N}$

- 1)  $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje;
- 2)  $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverguje.

**Důkaz.** 1)  $a_k \leq q^k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$   
 2)  $a_k \geq 1, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$

**Věta** (limitní tvar odmocninového kritéria). Necht'  $0 \leq a_k$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ . Je-li

- 1)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje;
- 2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverguje.

**Příklady.**

- 1)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\ln^k(k+1)}$  konverguje:  $\sqrt[k]{a_k} = \frac{\sqrt[k]{3}}{\ln(k+1)} \rightarrow 0 < 1$ .
- 2)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}$  diverguje:  $\sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{\sqrt[k]{k^{10}}} \rightarrow 2 > 1$ .
- 3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$  kritérium nerozhodne:  $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ ,  
 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \frac{1}{k})^{-1}] = e^{-1} \neq 0$  - diverguje.

**Poznámky.**

- 1) Stačí uvažovat  $\limsup_{k \rightarrow \infty} < 1, \liminf_{k \rightarrow \infty} > 1$ .
- 2) Odmocninové kritérium je účinnější (ne, pokud existují obě limity), ale někdy se hůře počítá.

**Příklad.**  $a_{2k-1} = 2^{-k}, a_{2k} = 2^{1-k}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots$$

$\sqrt[k]{a_k} \rightarrow 2^{-1/2} < 1$  - konverguje podle odmocninového kr.

$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = 2$  - podílové kritérium nerozhodne



**Věta** (integrální kritérium). *Nechť  $f$  je nezáporná nerostoucí integrovatelná funkce na  $(1, +\infty)$ . Pak  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  konverguje právě tehdy, když konverguje  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .*

Důkaz.  $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$ ,  
 $\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$

**Příklady.**

- 1)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverguje:  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty} = +\infty$ .
- 2)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  konverguje pro  $\alpha > 1$ :  $\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}$ .
- 3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$  diverguje:  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln \ln x]_1^{\infty} = +\infty$ .

**Příklad.** Jaká je chyba  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}$ , pokud sečteme prvních 100 členů?

$$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \geq \int_{101}^{\infty} x^{-2} dx = \frac{1}{100} = 0,001$$

$$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \leq \int_{100}^{\infty} x^{-2} dx = \frac{1}{101} \doteq 0,0099$$

**Věta** (Leibnizovo kritérium). *Nechť  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$  konverguje právě tehdy, když  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .*

Důkaz.  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$   
 $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \dots, s_{2k+1} \rightarrow s'$ ,  
 $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots, s_{2k} \rightarrow s'' \leq s'$   
 $s' - s'' = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$

**Příklad.**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots (= \ln 2)$  konverguje: střídají se znaménka,  $(|a_k|)_k = (\frac{1}{k})_k$  je nerostoucí, konverguje k 0.

### Absolutní konvergence

**Definice.** Řekneme, že  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje absolutně, pokud konverguje  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ .

**Příklad.**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  konverguje, ne absolutně:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  nekonverguje.

**Věta.** Konverguje-li  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ , pak konverguje  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Důkaz. 1)  $a_k \in \mathbb{R}$ :  $a^+ = \max\{a, 0\}$ ,  $a^- = \max\{-a, 0\}$

$$a = a^+ - a^-, |a| = a^+ + a^-, 0 \leq a^+, a^- \leq |a|$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konverguje ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$  konvergují (srovnávací kritérium) ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \text{ konv.}$$

2)  $a_k \in \mathbb{C}$ :  $0 \leq |\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \leq |a_k|$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konverguje ...

$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k|, \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_k|$  konvergují (srovnávací kr.) ...

$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$  konvergují podle 1) ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k \text{ konverguje}$$

**Poznámka.** Pokud reálná řada konverguje neabsolutně, pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$ .

**Poznámka.** Srovnávací, podílové, odmocninové a integrální kritérium jsou kritéria absolutní konvergence:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konv.}, |a_k| \leq b_k, \text{ pak } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv. abs.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k| < 1, \text{ pak } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv. abs.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1, \text{ pak } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv. abs.}$$

**Definice.** Přerovnáním řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nazýváme každou řadu  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ , kde  $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$  je prosté zobrazení.

**Věta.** Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje absolutně a má stejný součet.

Důkaz.

1)  $a_k \geq 0$ : označme  $m_n = \max\{f(1), \dots, f(n)\}$

$$\sum_{k=1}^n a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k, \text{ tedy } \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

opačná nerovnost: první řada je přerovnáním druhé pro  $f^{-1}$

2)  $a_k \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

3)  $a_k \in \mathbb{C}$ : rozkladem na reálnou a imaginární část

**Tvrzení.** Jestliže reálná řada nekonverguje absolutně a její členy konvergují k nule, pak každé reálné číslo je součtem některého přerovnání dané řady.

Důkaz (náznak).  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty, c \in \mathbb{R}$   
vybíráme nezáporné členy, dokud součet nebude  $\geq c$   
vybíráme záporné členy, dokud součet nebude  $\leq c$   
(postup opakujeme)

**Poznámka.** Podobně lze dosáhnout i součtu  $\pm\infty$ .

**Věta** (sčítání po částech). *Nechť  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje absolutně. Pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}, \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$  konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.*

Důkaz.  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \dots$  (absolutní konvergence)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \dots = a_1 + 0 + a_3 + 0 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} l_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = a_2 + a_4 + \dots = 0 + a_2 + 0 + a_4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} s_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} l_k + \sum_{k=1}^{\infty} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

**Poznámka.** Absolutně konvergentní řadu můžeme rozdělit na konečně mnoho různých přeskládaných částí, součet se přitom nezmění.