

Vybrané vztahy z teorie elektromagnetického pole

1. Elektrostatické pole

Hustota náboje:

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad \sigma = \frac{dQ}{dS} \quad \rho = \frac{dQ}{dV}$$

Napětí a potenciál:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \int_A^B E_t dl = \varphi_A - \varphi_B$$

Součet napětí ve smyčce:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \oint_l E_t dl = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$$

Intenzita a potenciál od bodového náboje:

$$E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon r^2} \quad \varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon r} + K$$

Intenzita a potenciál od nabitě přímky:

$$E = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon r} \quad \varphi = -\frac{\tau_0}{2\pi\epsilon} \ln r + K$$

Elektrický silový a indukční tok:

$$\chi[\text{V.m}] = \iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iint_S E_n dS \Rightarrow \iiint_V \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_0}{\epsilon}$$

$$\Psi[\text{C}] = \iint_S \vec{D} d\vec{S} = \iint_S D_n dS \Rightarrow \iiint_V \vec{D} d\vec{S} = Q_0$$

E a D v anizotropním dielektriku:

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad (\epsilon_{ij} \text{ je symetrický tenzor})$$

E a D v izotropním dielektriku:

$$D = \epsilon E \quad (\epsilon \text{ je skalár})$$

Kapacita a dielektrický odpor:

$$C = \frac{Q}{U} \quad R_d = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\epsilon S}$$

Kapacita deskového, kulového a válcového kondenzátoru:

$$C_d = \frac{\epsilon S}{d} \quad C_k = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad C_v = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Vztahy mezi E a φ :

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad \varphi = -\int \vec{E} d\vec{r}$$

Poissonova a Laplaceova rovnice:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \quad \Delta\varphi = 0$$

Vektor polarizace:

$$\vec{p} = Q\vec{a} \quad \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{E} = \text{div} \left(\frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_0 - \text{div } \vec{P}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 + \rho_v}{\epsilon_0}$$

Podmínky na rozhraní:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad E_{t1} = E_{t2}$$

2. Stacionární elektrické pole

Ohmův zákon:

$$U = RI \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Jouleův zákon:

$$P = UI = RI^2 \quad p = \vec{j} \vec{E}$$

Elektrický odpor:

$$R = \int_a^b \frac{dl}{\sigma S} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{l}{G} = \frac{U}{I}$$

Analogie mezi elektrostatickým a proudovým polem:

$$\vec{D} \sim \vec{J} \quad \epsilon \sim \sigma \quad C \sim G \quad Q \sim I$$

Podmínky na rozhraní:

$$j_{n1} = j_{n2} \quad E_{t1} = E_{t2}$$

3. Stacionární magnetické pole

Biotův-Savartův zákon:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

Ampérův zákon:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_l H_l dl = I \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

Vektor magnetizace:

$$d\vec{m} = I d\vec{S} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H}$$

Magnetický indukční tok:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S} = \iint_S B_n dS \quad \iiint_V \vec{B} d\vec{S} = 0$$

4. Kvazistacionární pole

Vlastní indukčnost:

$$L = \frac{\Phi_c}{I} \quad (\text{lineární prostředí})$$

$$L = \frac{d\Phi_c}{di} \quad (\text{nelineární prostředí})$$

Vzájemná indukčnost v lineárním prostředí:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12c}}{I_1} = M_{21} = \frac{\Phi_{21c}}{I_2}$$

Neumannův vzorec:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

Hopkinsonův zákon:

$$U_m = NI = R_m \Phi$$

Magnetický odpor (reluktance):

$$R_m = \int_a^b \frac{dl}{\mu S} [\text{H}^{-1}]$$

Energie induktoru:

$$W = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} LI^2 \quad w = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$$

Podmínky na rozhraní:

$$B_{n1} = B_{n2} \quad H_{t1} = H_{t2}$$

Rovnice kontinuity:

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Rovnice kontinuity pro volné náboje:

$$\text{div } \vec{J}_o + \frac{\partial \rho_o}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \sigma \frac{\vec{D}}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho_o}{\partial t} = 0$$

$$\rho_o(t) = \rho_o(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} = \rho_o(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Rovnice kontinuity pro vázané náboje:

$$\text{div } \vec{J}_p + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{J}_p + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{P}) = 0$$

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Maxwellovy rovnice:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I_o + \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad \text{div } \vec{D} = \rho_o$$

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Okrajové podmínky:

$$\text{Rot } \vec{H} = \alpha \quad \text{Rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{Div } \vec{D} = \sigma_o \quad \text{Div } \vec{B} = 0$$

5. Elektromagnetické vlny

Maxwellovy rovnice pro harmonický průběh:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I + j\omega\Psi \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + j\omega\vec{D}$$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -j\omega\Phi \quad \text{rot } \vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Energetická bilance:

$$-\oiint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$-\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Poyntingův vektor:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Střední hodnota Poyntingova vektoru:

$$\vec{S}_{str} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

Vlnová rovnice pro prostředí bez zdrojů:

$$\Delta \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Homogenní Helmholtzova rovnice:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$k^2 = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)$$

Rovinná homogenní vlna:

$$E(z, t) = E_{0m} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0)$$

Konstanta šíření:

$$k = \beta - j\alpha = \sqrt{-j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}$$

Měrný posun:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \right]}$$

Měrný útlum:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \right]}$$

Vlnová impedance:

$$Z = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}}$$

Vlnová délka:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Fázová rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Ekvivalentní hloubka vniku:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

6. Vlny ve vodivém prostředí

Elektrický povrchový jev:

$$J_y = J_{max} \frac{\cos kz}{\cos kh} = J_{max} \frac{\cosh(1+j)\alpha z}{\cosh(1+j)\alpha h}$$

$$J_{min} = J_{max} \frac{1}{\cosh(1+j)\alpha h}$$

Magnetický povrchový jev:

$$B_y = B_{max} \frac{\cos kx}{\cos ka} = B_{max} \frac{\cosh(1+j)\alpha x}{\cosh(1+j)\alpha a}$$

$$B_{min} = B_{max} \frac{1}{\cosh(1+j)\alpha a}$$