Zadání úlohy KOAX1

Koaxiální kabel se sestává ze dvou vodičů se společnou osou. Vnitřní vodič má poloměr R_{in}. Vnější vodič je velmi tenký, tvoří plášť válce o poloměru R_{out}. Prostor mezi vodiči je vyplněn dielektrikem o relativní permitivitě ε_r. Dále je známo napětí U_{12} (rozdíl potenciálů) mezi dvěma body, z nichž jeden leží na poloměru R_1, druhý na poloměru R_2 a potenciál φ_1 bodu na poloměru R_1.

Stanovte :

1. liniovou hustotu τ náboje na vnitřním vodiči,
2. potenciál φ_3 ekvipotenciály o poloměru R_3 a integrační konstantu K,
3. kapacitu mezi vodiči C vztaženou na metr délky,
4. indukčnost L_1 úseku kabelu o délce jeden metr pro případ, kdy lze zanedbat vnitřní indukčnost vodičů.
5. Určete unitřní indukčnost L_2 metrového úseku vnitřního vodiče pro případ, kdy nedochází k povrchovému jevu.
6. Určete maximální honotu výkonu P_{max}, který lze kabelem přenášet do zátěže o impedanci 10Ω za předpokladu, že elektrická pevnost dielektrika mezi vodiči je rovna $4MV/m$.
7. Na kabel je přiloženo napětí o poloviční velikosti napětí průrazného. Dielektrikum se sestává ze dvou částí, rozdělených řezem kolmým k ose kabelu. Stanovte sílu F, kterou se budou obě části dielektrika mezi vodiči přitahovat (v mezeře mezi částmi dielektrika uvažujte vakuum).

Relativní chyba vašich výsledků nesmí přesáhnout 2%. Vnitřní vodič je nabit kladným nábojem. Hodnoty vstupních dat jsou následující :

$$\begin{aligned}
R_{in} &= 1,555.10^{-3}\,m \\
R_{out} &= 8,702.10^{-3}\,m \\
R_1 &= 3,465.10^{-3}\,m \\
R_2 &= 4,708.10^{-3}\,m \\
R_3 &= 3,996.10^{-3}\,m \\
\varepsilon_r &= 3,662 \\
U_{12} &= 2,665\,V \\
\varphi_1 &= -7,995\,V
\end{aligned}$$

Vypracování :

ad 1. Z Gaussovy věty $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon}$ vyplývá :

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau_0 l}{\varepsilon} \qquad \text{z toho} \qquad E = \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon r}$$

$$\varphi = -\int \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\int \frac{dr}{r} = -\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\ln r + K$$

$$U_{12} = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad \text{z toho}$$

$$\tau_0 = \frac{2\pi\varepsilon U_{12}}{ln\frac{R_2}{R_1}} = 1,771.10^{-9}\,C/m$$

ad 2.

$$\varphi(R_1) = -\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\ln R_1 + K \qquad \text{z toho}$$

$$K = \varphi(R_1) + \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\ln R_1 = -57,24\,V$$

$$\varphi(R_3) = -\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\ln R_3 + K = -9.23\,V$$

ad 3.
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\tau_0 l}{\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}} \qquad \text{z toho}$$
$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}} = 1,183.10^{-12}\,F/m$$

ad 4. Indukčnost kabelu na jednotku délky vypočteme ze vztahu statické definice indukčnosti. Magnetickou indukci B určíme jako velikost indukce vytvořené vnitřním vodičem ve vzdálenosti r. Po užití Amperova pravidla vyjde vztah :
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
Dosadíme do vzorce pro magnetický tok a dostaneme :
$$\Phi = \iint_S \vec{B}\,d\vec{S} = \int_{R_{in}}^{R_{out}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,dr\,l = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}$$
Tento vzrorec dosadíme do vzorce :
$$L_1 = \frac{\Phi}{I} \quad \text{z čehož po úpravě vyjde :}$$
$$\frac{L_1}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_{out}}{R_{in}} = 3,44.10^{-7}\,H$$

ad 5. Jak je známo vnitřní indukčnost nelze počítat podle statické definice. Její velikost stanovíme na základě vztahu energie magnetického pole. Velikost magnetické intenzity a indukce uvnitř vodiče je :
$$H = \frac{Ir}{2\pi R_{in}^2} \qquad \text{a} \qquad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_{in}^2}$$
Pro objemovou hustotu energie magnetického obvodu platí :
$$w_m = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{Ir}{2\pi R_{in}^2}\right)^2$$
Potom :
$$W = \iiint_V w_m\,dV = \frac{1}{2}\int_0^{R_{in}} \mu_0\left(\frac{Ir}{2\pi R_{in}^2}\right)^2 2\pi r l\,dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} = \frac{1}{2}L_2 I^2$$
Z toho je :
$$\frac{L_2}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{4\pi.10^{-7}}{8\pi} = 5.10^{-8}\,H/m$$

ad 6. Pro napětí mezi vodiči platí :
$$U = \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}$$
Maximální intenzita je na okraji vnitřního vodiče :
$$E_{max} = \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon R_{in}} \qquad \text{z toho}$$
$$E_{max}R_{in} = \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon} \qquad \text{což po dosazení do } U \text{ dá :}$$
$$U_{max} = E_{max}R_{in}\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}$$
Pro maximální výkon potom platí vztah :
$$P_{max} = \frac{(U_{max})^2}{R} = \frac{\left(E_{max}R_{in}\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}\right)^2}{R} = 1,147.10^7\,W$$

ad 7. Tím, že kabel rozřežeme, v něm vzniknou dvě části. Jedna bude mít délku $l - x$ a bude vyplněna původním dielektrikem. Druhá bude mít délku x a bude vyplněna vakuem. Celkovou kapacitu takto rozděleného kabelu určíme jako paralelní kombinaci kapacit tvořených jednotlivými částmi.

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(l-x)}{\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}} + \frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_{out}}{R_{in}}}\left[\varepsilon_r l + x(1-\varepsilon_r)\right]$$

Z principu virtuální práce vyplývá :

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2}U^2\frac{dC(x)}{dx}$$

Což po dosazení za $U = \dfrac{U_{max}}{2}$ a derivaci $\dfrac{dC(x)}{dx}$ dá :

$$F = \frac{1}{4}\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_{max}^2 R_{in}^2 \ln\frac{R_{out}}{R_{in}} = 1,23.10^{-3}\,N$$