4. Stanovení teplotního součinitele odporu kovů

4.1. Zadání úlohy

1. Změřte teplotní součinitel odporu mědi v rozmezí 20 – 80 °C.
2. Změřte teplotní součinitel odporu platiny v rozmezí 20 – 80 °C.
3. Vyneste graf závislosti odporu R na teplotě t pro oba materiály.
4. Stanovte chybu měření pro teplotní součinitele odporu kovů.

4.2. Teoretický rozbor

V kovech je elektrický proud veden především pohybem volných elektronů v krystalové mříži. Měrný náboj elektronu je $1{,}75 \cdot 10^{-11}$ C · kg^{-1}. Atomy krystalové mříže nejsou v klidu ani při dosažení teploty absolutní nuly (−273,15 °C). Vykonávají kmity kolem své střední polohy v krystalové mříži.

Hustota elektrického proudu je dána diferenciálním tvarem Ohmova zákona:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad ,$$

kde $\vec{j}$ je vektor proudové hustoty, $\vec{E}$ je vektor intenzity elektrického pole a γ je konduktivita. Konduktivitu lze stanovit podle vztahu:

$$\gamma = \frac{e^2 n_e}{2 m_e v_e} \quad ,$$

kde n_e je hustota elektronového plynu, e je náboj elektronu (e=1,602·10^{-10}C), m_e je hmotnost elektronu a v_e je srážkový kmitočet elektronu.

Zvětšování elektrického odporu při zvětšování teploty lze vysvětlit podle kinetické teorie elektronového plynu. Zatímco střední hodnota rychlosti neuspořádaného pohybu elektronů se mění s nárůstem teploty jen málo, velký vliv má zvýšení teploty na vlastní kmitočet kmitů atomů v krystalové mřížce. Podle rovnice pro konduktivitu z toho vyplývá, že se bude konduktivita snižovat, tedy bude růst elektrický odpor materiálu.

Měrný odpor je převrácenou hodnotou konduktivity a jeho závislost na teplotě je:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \rho_0(1 + \alpha t) \quad ,$$

respektive

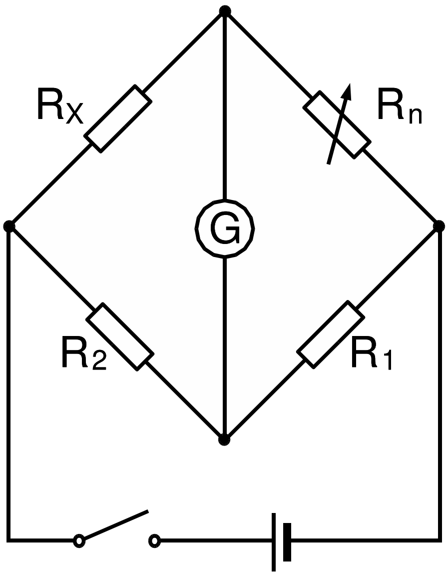
$$R = R_0(1 + \alpha t) \quad ,$$

kde ρ_0 je rezistivita při teplotě 0 °C, α je teplotní součinitel odporu.

Přítomnost volných elektronů v kovech má za následek i dobrou tepelnou vodivost těchto látek. Závislost mezi tepelnou a elektrickou vodivostí popisuje Wiedermannův-Franzův zákon, který říká, že poměr mezi tepelnou a elektrickou vodivostí je konstantní a úměrný absolutní teplotě kovu:

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \text{konst} \cdot T$$

U slitin kovů je závislost měrného odporu na teplotě charakterizována výrazným minimem. Některé slitiny kovů mají i záporný teplotní součinitel odporu. To je velice výhodné, neboť to umožňuje výrobu odporů zcela (nebo alespoň výrazně) nezávislých na teplotě.



Obrázek 1: Schéma měřícího můstku pro určování odporu.

4.3. Postup měření

1. Zapojíme můstek pro měření odporů.
2. Měření odporu provádíme na měřicím můstku MLG-Metra.
3. Do kádinky dáme asi 650 ml vody, vložíme míchadlo a měřený odpor.
4. Kádinku postavíme na topnou desku vařiče s magnetickou míchačkou a vložíme teploměr tak, aby spodní část byla asi 50 mm nad dnem.
5. Zapneme míchačku a nastavíme na asi 300 ot./min.
6. Asi po 5 minutách zapneme spínač topení a měříme odpor vzorku po 2 °C v teplotním rozmezí 20 – 80 °C.

4.3.1. Použité měřící přístroje

- Wheatstoneův můstek MLG Metra, TP 0,3 %
- Teploměr ČSN 28 8134, nejmenší dílek 0,2 °C
- Laboratorní zdroj MM2A

4.4. Naměřené hodnoty

t [°C]	R_{Cu} [Ω]	R_{Pt} [Ω]	α_{Cu} [$\mathrm{K}^{-1} \cdot 10^{-3}$]	α_{Pt} [$\mathrm{K}^{-1} \cdot 10^{-3}$]	t [°C]	R_{Cu} [Ω]	R_{Pt} [Ω]	α_{Cu} [$\mathrm{K}^{-1} \cdot 10^{-3}$]	α_{Pt} [$\mathrm{K}^{-1} \cdot 10^{-3}$]
26	35,20	110,4	4,439	3,848	58	39,25	122,6	4,262	3,828
28	35,30	111,1	4,347	3,836	60	39,54	123,3	4,274	3,817
30	35,51	111,8	4,279	3,813	62	39,78	124,2	4,259	3,839
32	35,80	112,5	4,300	3,793	64	40,09	124,9	4,280	3,828
34	36,06	113,3	4,290	3,804	66	40,40	125,9	4,299	3,863
36	36,28	114,1	4,246	3,814	68	40,64	126,2	4,285	3,793
38	36,60	115,0	4,290	3,850	70	40,89	127,2	4,276	3,827
40	36,82	115,7	4,250	3,832	72	41,18	128,0	4,285	3,831
42	37,07	116,4	4,237	3,815	74	41,49	128,6	4,303	3,809
44	37,35	117,2	4,246	3,823	76	41,76	129,5	4,302	3,827
46	37,64	118,3	4,262	3,895	78	41,95	130,3	4,269	3,831
48	37,98	118,8	4,310	3,837	80	42,20	131,0	4,262	3,822
50	38,30	119,4	4,341	3,803	82	42,57	131,8	4,301	3,826
52	38,53	120,3	4,314	3,829	84	42,89	132,6	4,320	3,830
54	38,80	121,0	4,313	3,817	86	43,13	133,4	4,308	3,834
56	39,00	121,8	4,273	3,823					

4.4.1. Odhad regresních parametrů

Výpočty při hledání lineární závislosti odporu na teplotě $R(t) = at + R_0$.

Měď – příklad výpočtu

- Odhad směrnice aproximační přímky:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} t_i R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} R_i}{n \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2} = \frac{31 \cdot 69120{,}44 - 1736{,}70 \cdot 1210{,}00}{31 \cdot 107172{,}89 - 1736{,}70^2} = 0{,}135$$

- Odhad odporu R_0:

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i - a \sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \frac{1210{,}00 - 0{,}135 \cdot 1736{,}70}{31} = 31{,}492\,\Omega$$

- Zjištěná lineární závislost je: $R(t) = 0{,}135t + 31{,}492$

- Pravděpodobná chyba určení regresních parametrů:

$$\vartheta_a = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^{n} R_i^2 - R_0 \sum_{i=1}^{n} R_i - a \sum_{i=1}^{n} t_i R_i \right)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2}}$$

$$\vartheta_a = \frac{\sqrt{\frac{1}{29}\left(47409{,}01 - 31{,}492 \cdot 1210{,}00 - 0{,}135 \cdot 69120{,}44\right)}}{\sqrt{19756{,}95}} = 2{,}238 \cdot 10^{-3}$$

$$\vartheta_{R_0} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} R_i^2 - R_0 \sum_{i=1}^{n} R_i - a \sum_{i=1}^{n} t_i R_i\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{t}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2}}$$

$$\vartheta_{R_0} = \sqrt{\frac{1}{29}\left(47409{,}01 - 31{,}492 \cdot 1210{,}00 - 0{,}135 \cdot 69120{,}44\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{56{,}02^2}{19756{,}95}} = 14{,}603 \cdot 10^{-3}$$

Platina

- Odhad směrnice aproximační přímky: $a = 0{,}384$
- Odhad odporu $R_0 = 100{,}324\,\Omega$
- Zjištěná lineární závislost je: $R(t) = 0{,}384t + 100{,}324$
- Pravděpodobná chyba určení regresních parametrů: $\vartheta_a = 0{,}482 \cdot 10^{-3}$, $\vartheta_{R_0} = 29{,}602 \cdot 10^{-3}$

4.4.2. Příklad výpočtu pro data v tabulce

- Výpočet teplotního součinitele α_{Cu} pro měď (odhad odporu při teplotě $t = 0$ °C je $R_0 = 31{,}492\,\Omega$):

$$\alpha_{\mathrm{Cu}} = \frac{R_t}{R_{t0}(t - t_0)} - \frac{1}{t - t_0} = \frac{37{,}98}{31{,}492(48 - 0)} - \frac{1}{48 - 0} = 4{,}310 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

- Výpočet teplotního součinitele α_{Pt} pro platinu (odhad odporu při teplotě $t = 0$ °C je $R_0 = 100{,}324\,\Omega$):

$$\alpha_{\mathrm{Pt}} = \frac{R_t}{R_{t0}(t - t_0)} - \frac{1}{t - t_0} = \frac{118{,}8}{100{,}324(48 - 0)} - \frac{1}{48 - 0} = 3{,}837 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

4.4.3. Výsledky měření

- Stanovení teplotního součinitele odporu kovů:
  - Pro měděný drát:

$$\alpha_{\mathrm{Cu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{1}{31} \cdot 0{,}1330 \doteq 4{,}286 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

  - Pro platinový drátek:

$$\alpha_{\mathrm{Pt}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{1}{31} \cdot 0{,}1183 \doteq 3{,}820 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

- Určení pravděpodobné chyby tepl. součinitele $\overline{\vartheta}$:

- Pro měď:

$$\overline{\vartheta}(\overline{\alpha}_{\mathrm{Cu}}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \overline{\alpha}_{\mathrm{Cu}})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{930}\cdot 1{,}049\cdot 10^{-8}} \doteq 2{,}315\cdot 10^{-6}$$

- Pro platinu:

$$\overline{\vartheta}(\overline{\alpha}_{\mathrm{Pt}}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \overline{\alpha}_{\mathrm{Pt}})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{930}\cdot 8{,}340\cdot 10^{-9}} \doteq 2{,}064\cdot 10^{-6}$$

- Relativní chyba měření:
  - odporu daná třídou přesnosti měřícího můstku je δ_R=0,3 %
  - teploty je δ_t=0,17 % (vychází z nejmenšího dílku 0,2 °C)
  - pro měď:

$$\delta_r = \frac{\overline{\vartheta}(\overline{\alpha}_{\mathrm{Cu}})}{\alpha_{\mathrm{Cu}}}\cdot 100+\delta_R+\delta_t = \frac{2{,}315\cdot 10^{-6}}{4{,}286\cdot 10^{-3}}\cdot 100+0{,}3+0{,}17 = 0{,}054+0{,}3+0{,}17 = 0{,}524\,\%$$

  - pro platinu:

$$\delta_r = \frac{\overline{\vartheta}(\overline{\alpha}_{\mathrm{Pt}})}{\alpha_{\mathrm{Pt}}}\cdot 100+\delta_R+\delta_t = \frac{2{,}064\cdot 10^{-6}}{3{,}826\cdot 10^{-3}}+0{,}3+0{,}17 = 0{,}054+0{,}3+0{,}17 = 0{,}524\,\%$$

4.5. Závěr

Stanovené teplotní součinitele odporu kovů:

- Měď – $\alpha_{\mathrm{Cu}} = (4{,}286 \pm 0,022)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$, tato hodnota se od tabulkové hodnoty $4{,}33\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$ liší o 1,02 %.
- Platina – $\alpha_{\mathrm{Pt}} = (3{,}826 \pm 0,020)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$, tato hodnota se od tabulkové hodnoty $3{,}92\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$ liší o 2,40 %.

4.6. Kontrolní otázky

1. Jaká je nutná podmínka k tomu, aby daná pevná látka vykazovala dobrou elektrickou vodivost?

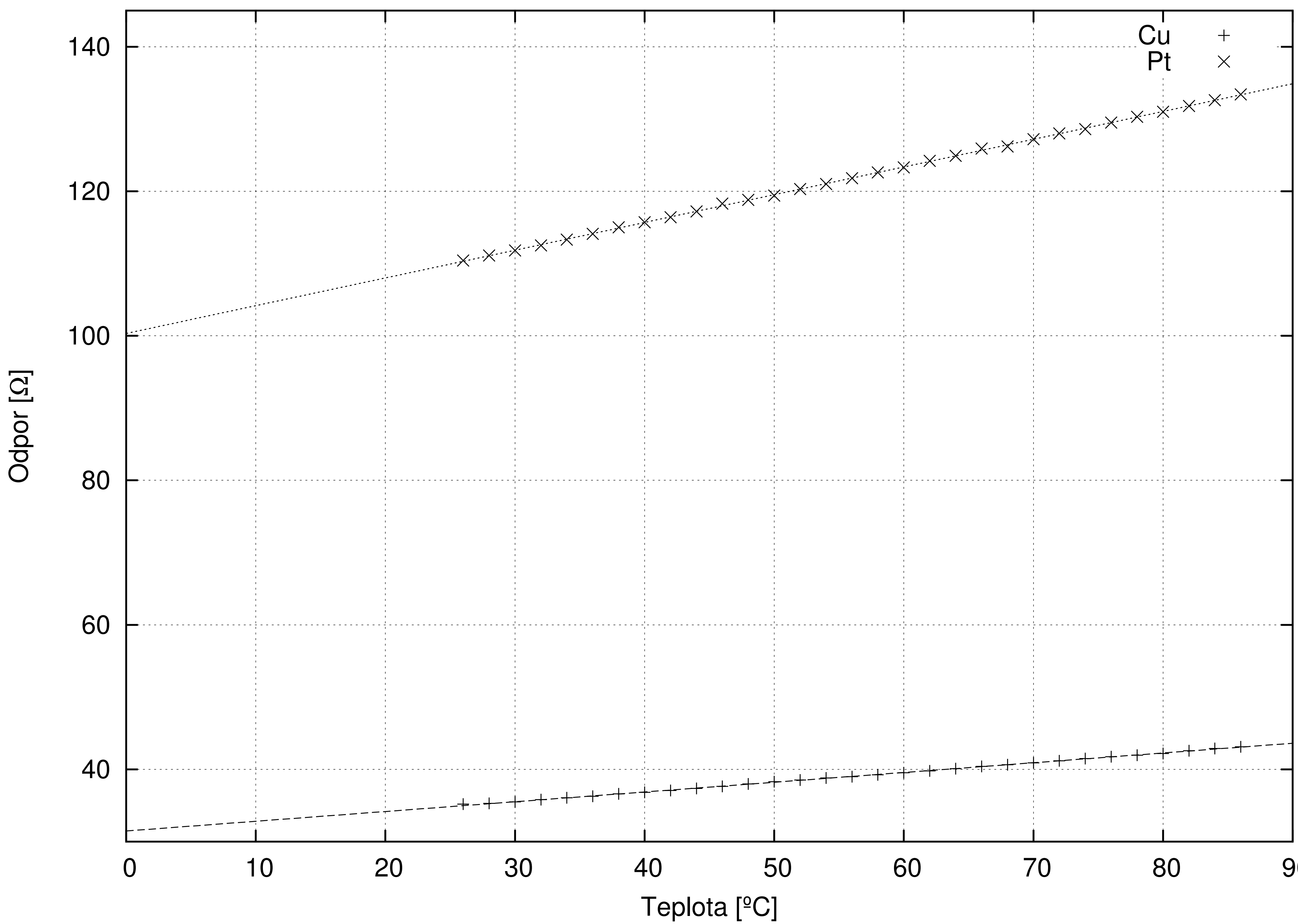
   Kovy s dobrou elektrickou vodivostí jsou tvořeny z atomů s lichým počtem elektronů (energetické pásy jsou pouze částečně zaplněny). Výjimkou jsou některé prvky obsahující sudý počet elektronů. U nich se překrývá zaplněný energetický pás s nejbližším prázdným pásem.

2. Jak se projeví nečistoty a defekty krystalu na jeho vodivosti?

   Nečistoty a defekty kovového krystalu představují pro nosič náboje překážku, což se projeví snížením vodivosti.

3. Jaká je obecně závislost měrného odporu kovů na teplotě?

   Pro nízké teploty vykazuje měrný odpor kovů na teplotě nelineární závislost. Pro teploty $T/\Theta > 0{,}3$ začíná mít lineární průběh (Θ označuje *Debyovu teplotu*), který zůstává i pro teploty vyšší.


Cu
Pt
140
120
100
80
60
40
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Odpor [Ω]
Teplota [ºC]