str. 181, př. 8

Nechť $\vec{a}=\left(-2\vec{i},3\vec{j}+\vec{k}\right),\vec{b}=\left(-\vec{i},2\vec{j},-3\vec{k}\right)$. Najděte vektor $\vec{x}$, který je kolmý k vektorům $\vec{a},\vec{b}$ a pro který platí $\vec{x}\left(2\vec{i},-\vec{j},\vec{k}\right)=2$.

$$x_1=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ i & j & k\end{vmatrix}=-4k+9i-j-2i-3k+6j=-7k+7i-7j$$

$$M.\vec{x}\left(2\vec{i},-\vec{j},\vec{k}\right)=2$$

$$M\left[\left(7\vec{i},-7\vec{j},-7\vec{k}\right)\left(2\vec{i},-\vec{j},\vec{k}\right)\right]=2$$

$$M\left(14+7-7\right)=2$$

$$M=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$$

$$x=Mx_1$$

$$x=\frac{1}{7}\left(-7k+7i-7j\right)$$

$$x=-k+i-j=$$

$$=i-j-k$$

str. 181, př. 19

Vypočtěte plochu $\triangle ABC,\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=2\vec{a}-\vec{b},|a|=2,|b|=3,\measuredangle\left(a,b\right)=\frac{\pi}{6}$.

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\left(a+b\right)x\left(2x-b\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(axa\right)-\left(axb\right)+2\left(axb\right)-\left(bxb\right)\right|=\frac{3}{2}\left(bxa\right)=\frac{3}{2}.2.3.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=9.\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

Obsah je $\frac{9}{2}$.

str. 202, př. 6

Je dána přímka $\beta:X=\left[1,0,1\right]+t\left(2,-1,1\right),t\in R$ a bod $A=\left[3,-1,0\right]$. Bodem A veďte rovinu φ kolmou na přímku p a nalezněte jejich průsečík.

$\vec{p}$ - směr. vektor přímky p

$\vec{q}$ - směr. vektor

$\vec{p}.\vec{q}=0$

$\vec{q}=\overrightarrow{KA}=\left(x-3;y+1;z\right)$

$\vec{p}=\left(2;-1;1\right)$

bod K = průsečík

$$\vec{n}.\vec{v}=0$$

Rovnice roviny φ:

$$2\left(1+2t\right)-\left(-t\right)+\left(1+t\right)-7=0$$

$$2+4t+t+1+t-7=0$$

$$6t=4$$

$$t=\frac{2}{3}$$

$t \to p:$

$x = 1 + 2\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

$y = -\frac{2}{3}$

$z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$K = \left[\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right]$

str. 203, př. 19

Nalezněte průsečík přímky $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{2}$ s rovinou ρ, která prochází bodem $Q = [10,13,9]$ a přímkou $q: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{3}$.

$$\rho = \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{q} \\ \overrightarrow{XQ} \end{array} \begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 22 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$2.12(z-2) + 22.3(y+1) + 7.0(x+3) - [(z-2)0.22 + 3.12(x+3) + 7.2(y+1)] =$

$24z - 48 + 66y + 66 - 36x - 108 - 14y - 14 = -36x + 52y + 24z - 104 = -9x + 13y + 6z - 26 = 0$

$-9(1+3t) + 13(-2+4t) + 6(0+2t) - 26 = 0$

$t = 2$

$x = 1 + 3t = 1 + 3.2 = 7$

$y = -2 + 4t = -2 + 4.2 = 6$

$z = 0 + 2t = 0 + 2.2 = 4$

$P = [7,6,4]$

Průsečík je $P = [7,6,4]$.

str. 204, př. 29

Nalezněte bod souměrně sdružený s bodem $P = [-4;5;8]$ podle spojnice bodů $A = [9;4;10]$ a $B = [-6;1;1]$.

$p: x = B + t\overrightarrow{AB} = [-6;1;1] + t[9-(-6);4-1;10-1] = [-6;1;1] + t(15;3;9)$

$q: x = P + t\overrightarrow{PK} = [-4;5;8] + (x+4; y-5; z-8)$

$\overrightarrow{BA} x \overrightarrow{BK} = 0$

$15(x+4) + 3(y-5) - 9(z-8) = 0$

$15x + 60 + 3y - 15 + 9z - 72 = 0$

$5x + y + 3z = 9$

$$15(x+4)+3(y-5)-9(z-8)=0$$
$$15x+60+3y-15+9z-72=0$$
$$5x+y+3z=9$$
$$5(-6+15t)+(1+3t)+3(1+9t)=9$$
$$-30+75t+1+3t+3+27t=9$$
$$105t=35$$
$$t=\frac{1}{3}$$
$$K=\left[-6+\frac{1}{3}.15;1+\frac{1}{3}3;1+\frac{1}{3}9\right]=[-1;2;4]$$
$$\overline{P}=2k-P=2[-1,2,4]-[-4,5,8]=[-2+4;4-5;8-8]=[2,-1,0]$$

Sdruženým bodem P je bod $\overline{P}=[2,-1,0]$.

str. 205, př. 37

V závislosti na parametrech a,b vyšetři vzájemnou polohu rovin ρ,σ,τ

$\rho: 2x+3y+4z=2$

$\sigma: -x+2y+z=b$

$\tau: x+5y+az=4$

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&4&2\\-1&2&1&b\\1&5&a&4\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&4&2\\0&7&6&2b+2\\0&7&1+a&b+4\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&4&2\\0&7&6&2b+2\\0&0&5-a&b-2\end{array}\right]$$

Matice je singulární právě pro $a\neq 5, b\neq 2$ a má $hodA=3$.
Průsečík je v jednom bodě ?!

V případě $a=5, b\neq 2, hodA=3$ se roviny neprotínají, jsou rovnoběžné.

V případě $a=5, b=2, hodA=2, hod\overline{A}=3$ se roviny protínají a mají průsečnici.