Karnaughovy mapy

Doplněk k předmětu Matematická logika

Jiří Velebil
katedra matematiky
FEL ČVUT, Praha
velebil@math.feld.cvut.cz
15. ledna 2001

Smyslem této poznámky je pouze podat doplněk ke skriptu doc. Marie Demlové a prof. Bedřicha Pondělíčka *Matematická logika*, FEL ČVUT, Praha 1997. Dodržujeme tedy značení a terminologii z kapitoly 8 tohoto skripta.

Přesto, abychom se mohli rozumně vyjadřovat, bylo v tomto textu nutné zavést některé nové pojmy. Čtenář, který Karnaughovy mapy zná, může používat ty pojmy, na které je zvyklý.

Karnaughovy mapy jsou přepisem pravdivostní tabulky a slouží jako nástroj k rychlému zápisu konjunktivních a disjunktivních normálních forem (CNF a DNF) formulí výrokové logiky. V této poznámce se zaměříme na následující problémy:

1. Je-li dána pravdivostní tabulka formule, jak napsat tuto formuli v úplné CNF a úplné DNF?
2. Je-li dána pravdivostní tabulka formule, jak napsat tuto formuli v CNF a DNF, které jsou v ireducibilním tvaru, tzn. tyto formy již nelze dále redukovat pomocí pravidel výrokové logiky?

Obě úlohy lze vyřešit poměrně snadno pomocí Karnaughových map.

Poděkování. Děkuji Dr. Kalousové a Dr. Nentvichovi za pečlivé pročtení textu a za připomínky, které k němu měli.

1 Co je DNF a CNF

Nejprve připomeneme základní definice: ať φ je formule výrokové logiky. Řekneme, že formule ψ je

- *disjunktivní normální formou* (též *DNF*) formule φ, pokud platí $\psi \models\!\mid \varphi$ a formule ψ je buď formule

  $$\boldsymbol{T}$$

  nebo je napsána ve tvaru

  $$\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

  pro nějaké přirozené číslo $n \geq 1$, kde každá formule ψ_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) je buď rovna formuli $\boldsymbol{F}$, tj. kontradikci, nebo je napsána ve tvaru

  $$l_1 \wedge \ldots \wedge l_{k_i}$$

  pro nějaké přirozené číslo $k_i \geq 1$ a každé l_j ($j \in \{1, \ldots, k_i\}$) je buď logická proměnná nebo negace logické proměnné. V tomto kontextu každé formuli ψ_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) říkáme *klausule pro DNF* (používá se i termín *minterm*) a každému l_j ($j \in \{1, \ldots, k_i\}$) říkáme *literál.*

  Číslu n budeme říkat *počet klausulí v DNF* a každému z čísel $k_1, \ldots k_n$ budeme říkat *délka klausulí* $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

  V případě, že ψ je formule $\boldsymbol{T}$, říkáme, že DNF formule φ má nulový počet klausulí pro DNF.

  Poznamenejme ještě, že klausule $\boldsymbol{F}$ má délku 0.

- *konjunktivní normální formou* (též *CNF*) formule φ, pokud platí $\psi \models\!\mid \varphi$ a formule ψ je buď formule

  $$\boldsymbol{F}$$

  nebo je napsána ve tvaru

  $$\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$$

pro nějaké přirozené číslo $n \geq 1$, kde každá formule ψ_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) je buď rovna formuli $\boldsymbol{T}$, tj. tautologii, nebo je napsána ve tvaru

$$l_1 \vee \ldots \vee l_{k_i}$$

pro nějaké přirozené číslo $k_i \geq 1$ a každé l_j ($j \in \{1, \ldots, k_i\}$) je buď logická proměnná nebo negace logické proměnné. V tomto kontextu každé formuli ψ_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) říkáme *klausule pro CNF* (používá se i termín *maxterm*) a každému l_j ($j \in \{1, \ldots, k_i\}$) říkáme *literál.*

Číslu n budeme říkat *počet klausulí v CNF* a každému z čísel $k_1, \ldots k_n$ budeme říkat *délka klausulí* $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

V případě, že ψ je formule $\boldsymbol{F}$, říkáme, že CNF formule φ má nulový počet klausulí pro CNF.

Poznamenejme ještě, že klausule $\boldsymbol{T}$ má délku 0.

Pozorný čtenář jistě zjistil, že definice DNF a CNF formule jsou si velmi podobné. Tato podobnost (jde o jistou dualitu) v praxi umožňuje zformulovat postupy a výsledky například pouze pro disjunktivní normální formy a potom se odvolat na dualitu mezi DNF a CNF. Protože tento text chce být elementární, nebudeme žádnou dualitu zavádět. Za tento elementární postup platíme jistou zdlouhavostí textu — naprostou většinu výsledků uvádíme zvlášť pro DNF a CNF.

Nejprve definici DNF rozebereme podrobněji. Formule ψ je disjunktivní normální formou formule φ, pokud jsou splněny následující dva požadavky:

1. Formule ψ je *synonymem* pro φ, tj. platí $\psi \models\!\!\!\dashv \varphi$.

2. Formule ψ má speciální *syntaktickou stavbu*: tj. ψ je disjunkcí „stavebních kamenů“ pro disjunktivní normální formu. Těmto stavebním kamenům říkáme *klausule pro DNF.* Každá klausule pro DNF má opět speciální syntaktickou stavbu: klausule pro DNF je konjunkcí literálů. Literál je buď logická proměnná nebo negace logické proměnné a slouží jako „stavební kámen“ pro tvorbu klausule pro DNF.

   Při tvorbě DNF je možné nepoužít žádnou klausuli (v případě, že $\varphi \models\!\!\!\dashv \boldsymbol{T}$) nebo je třeba použít alespoň jednu klausuli (potom počet klausulí je číslo n z uvedené definice). Lze však použít klausule kladné délky nebo klausule délky 0.

Analogicky lze rozebrat definici konjunktivní normální formy formule.

Příklady 1 Uveďme nyní nějaké příklady. Předpokládáme, že symboly a, b, c jsou logické proměnné.

1. Pro formuli $\varphi = a \Rightarrow b$ je formule $\psi = \neg a \vee b$ její disjunktivní normální formou. Především zřejmě platí $\psi \models\!\!\!\dashv \varphi$. Dále je formule ψ sestavena ze dvou klausulí pro DNF: $\neg a$ a b. Jak $\neg a$, tak b jsou klausule pro DNF, protože a a b jsou logické proměnné. Abychom zdůraznili, že ψ má dvě klausule pro DNF, budeme psát $\psi = (\neg a) \vee (b)$. Každá z těchto klausulí má délku jedna, protože každá obsahuje pouze jeden literál.

   Na formuli ψ se lze ovšem dívat i jako na konjunktivní tvar formule φ: $\neg a \vee b$ je klausule pro CNF, $\psi = (\neg a \vee b)$. Tato jediná klausule má délku dva — obsahuje totiž dva literály.

   Tento příklad ukazuje, že stejný řetězec může být chápán jako disjunktivní i konjunktivní normální forma. Taková situace ale není typická.

2. Pro formuli $\varphi = a \Rightarrow a$ je možné nalézt DNF například takto:

   $$a \Rightarrow a \models\!\!\!\dashv (a) \vee (\neg a)$$

   Použili jsme dvě klausule pro DNF: a (klausule délky 1) a $\neg a$ (klausule délky 1).

   Lze však napsat i

   $$a \Rightarrow a \models\!\!\!\dashv \boldsymbol{T}$$

   a to je podle definice opět DNF formule φ. Tato DNF má nulový počet klausulí.

   Hledáme-li CNF pro formuli $\varphi = a \Rightarrow a$, využijeme opět vztahu

   $$a \Rightarrow a \models\!\!\!\dashv (a \vee \neg a)$$

   Použili jsme jednu klausuli pro CNF: $a \vee \neg a$ (klausule délky 2).

3. Uvažujme ještě jednou o formuli $\varphi = a \Rightarrow b$. Pojem DNF, který jsme zavedli, nám dovoluje za DNF pro φ považovat i formuli $\psi = (\neg a) \vee (b) \vee (\boldsymbol{F})$. Na tvorbu DNF jsme tentokrát použili tři klausule, třetí klausule je délky nula.

   Analogicky zkuste zapsat CNF pro formuli ψ použitím tří klausulí pro CNF.

   Zjišťujeme tedy, že úloha *najděte DNF a CNF* nemá jednoznačné řešení.

4. Pro formuli $\varphi = \neg a \Rightarrow (b \wedge c)$ nalezneme DNF snadno:

$$\neg a \Rightarrow (b \wedge c) \models\!\!\!\dashv a \vee (b \wedge c),$$

   Tedy DNF má dvě klausule: a (klausule délky jedna) a $b \wedge c$ (klausule délky dva).

   Použitím distributivního zákona na formuli $a \vee (b \wedge c)$ pak dostáváme

$$a \vee (b \wedge c) \models\!\!\!\dashv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

   a formule napravo je CNF formule φ. Obsahuje dvě klausule: $a \vee b$ a $a \vee c$, obě klausule mají délku dvě.

□

2 Úplná DNF a úplná CNF

Než budeme definovat Karnaughovy mapy, vyřešíme úkol najít *jakoukoli* DNF a CNF pro danou formuli elementárními prostředky. Metoda Karnaughových map bude zobecněním následujícího postupu.

Příklad 2 Předpokládejme, že symboly a, b, c jsou logické proměnné. Nalezněme jakoukoli DNF a jakoukoli CNF pro formuli $\varphi = (b \Rightarrow \neg c) \Leftrightarrow ((a \wedge c) \Rightarrow b)$. Nejprve spočtěme obvykým způsobem pravdivostní tabulku pro formuli φ.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Začněme hledat jakoukoli DNF formule φ. Nejprve si uvědomme, že hledáme formuli ψ, která je synonymem formule φ, tj. platí $\psi \models\!\!\!\dashv \varphi$ a navíc formule ψ je disjunkcí nějakých dalších formulí (které jsou klausulemi pro DNF). Především požadavek $\psi \models\!\!\!\dashv \varphi$ vyžaduje, aby pravdivostní tabulka pro ψ byla stejná jako pravdivostní tabulka pro formuli φ. Díváme-li se na poslední sloupec tabulky pro φ jako na vektor, pak sloupec pro ψ musí být vytvořen „logickým součtem“ nějakých dalších vektorů nul a jedniček délky osm. Každý z těchto vektorů musí být pravdivostní tabulkou klausule pro DNF.

Uvažujme o následujících osmi formulích f_1, f_2, $\ldots f_8$, které zadáme pravdivostními tabulkami:

a	b	c	f_1	f_2	$\ldots$	f_8
0	0	0	1	0		0
0	0	1	0	1		0
0	1	0	0	0		0
0	1	1	0	0		0
1	0	0	0	0		0
1	0	1	0	0		0
1	1	0	0	0		0
1	1	1	0	0		1

Zřejmě $\varphi \models\!\mid f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee f_5 \vee f_7$. Úloha bude vyřešena, pokud ukážeme, že každá z formulí f_1, f_2, f_3, f_5, f_7 odpovídá klausuli pro DNF. Platí však více: všechny formule f_1 až f_8 lze chápat jako klausule pro DNF:

$$\begin{array}{ll} f_1 \models\!\mid (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) & f_5 \models\!\mid (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \\ f_2 \models\!\mid (\neg a \wedge \neg b \wedge c) & f_6 \models\!\mid (a \wedge \neg b \wedge c) \\ f_3 \models\!\mid (\neg a \wedge b \wedge \neg c) & f_7 \models\!\mid (a \wedge b \wedge \neg c) \\ f_4 \models\!\mid (\neg a \wedge b \wedge c) & f_8 \models\!\mid (a \wedge b \wedge c) \end{array}$$

DNF pro formuli φ je tedy formule

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c).$$

Analogicky, hledáme-li jakoukoli CNF formule φ, uvědomme si, že hledáme formuli ψ, která je synonymem formule ψ, tj. platí $\psi \models\!\mid \varphi$ a navíc formule ψ je konjunkcí nějakých dalších formulí (které jsou klausulemi pro CNF). Opět požadavek $\psi \models\!\mid \varphi$ vyžaduje, aby pravdivostní tabulka pro ψ byla stejná jako pravdivostní tabulka pro formuli φ. Díváme-li se na poslední sloupec tabulky pro φ jako na vektor, pak sloupec pro ψ musí být vytvořen logickým součinem nějakých dalších vektorů nul a jedniček délky osm. Každý z těchto vektorů musí být pravdivostní tabulkou klausule pro CNF.

Uvažujme o následujících osmi formulích g_1, g_2, $\ldots g_8$, které zadáme pravdivostními tabulkami:

a	b	c	g_1	g_2	$\ldots$	g_8
0	0	0	0	1		1
0	0	1	1	0		1
0	1	0	1	1		1
0	1	1	1	1		1
1	0	0	1	1		1
1	0	1	1	1		1
1	1	0	1	1		1
1	1	1	1	1		0

Zřejmě $\varphi \models\!\mid g_4 \wedge g_6 \wedge g_8$. Úloha bude vyřešena, pokud ukážeme, že každá z formulí g_4, g_6, g_8 odpovídá klausuli pro CNF. Opět platí více: všechny formule g_1 až g_8 lze chápat jako klausule pro CNF:

$$\begin{array}{ll} g_1 \models\!\mid (a \vee b \vee c) & g_5 \models\!\mid (\neg a \vee b \vee c) \\ g_2 \models\!\mid (a \vee b \vee \neg c) & g_6 \models\!\mid (\neg a \vee b \vee c) \\ g_3 \models\!\mid (a \vee \neg b \vee c) & g_7 \models\!\mid (\neg a \vee \neg b \vee c) \\ g_4 \models\!\mid (a \vee \neg b \vee \neg c) & g_8 \models\!\mid (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \end{array}$$

CNF pro formuli φ je tedy formule

$$(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c).$$

□

Předchozí způsob výpočtu DNF a CNF nebyl možná ten nejefektivnější. Vyzkoušejte si, že např. formule

$$(\neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

je též DNF pro formuli φ, navíc obsahuje jako řetězec *méně znaků* než

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c).$$

Z další části bude patrné, že způsob hledání DNF a CNF, který jsme předvedli v příkladu 2, vždy vede na řetězec, který obsahuje maximální počet znaků.

Zaveďme následující pojem:

Definice 3 Ať φ je formule výrokového počtu. Ať $\{a_1, \ldots a_s\}$ je seznam všech navzájem různých logických proměnných obsažených ve formuli φ. Řekneme, že formule ψ je

- *úplnou DNF pro formuli* φ, pokud ψ je DNF formule φ a navíc každá klausule pro DNF v ψ obsahuje přesně s různých literálů. V žádné klausuli však nesmí být obsaženy dva literály obsahující tutéž logickou proměnnou (tj. například a a $\neg a$ současně).

- *úplnou CNF pro formuli* φ, pokud ψ je CNF formule φ a navíc každá klausule pro CNF v ψ obsahuje přesně s různých literálů. V žádné klausuli však nesmí být obsaženy dva literály obsahující tutéž logickou proměnnou (tj. například a a $\neg a$ současně).

□

Příklad 4 Zřejmě formule

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

je úplná DNF formule φ z příkladu 2. Formule

$$(\neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

je samozřejmě DNF formule φ, ovšem nejde o úplnou DNF, protože například klausule $(\neg b \wedge \neg c)$ obsahuje pouze dva literály. □

Příklad 5 Protože pro formuli $\varphi = a \Rightarrow a$ platí $\varphi \models\!\mid \neg a \vee a$, obsahuje CNF pro φ jedinou klausuli $(\neg a \vee a)$.

Úplná CNF pro φ však *neexistuje*. Klausule $(\neg a \vee a)$ totiž obsahuje dva literály se stejnou logickou proměnnou.

Formule φ však samozřejmě má úplnou DNF: jde o formuli $(\neg a) \vee (a)$, která obsahuje dvě klausule. □

Příklad 2 lze snadno zobecnit a dát tak obecný návod na hledání úplné DNF a úplné CNF dané formule.

Jak najít úplnou DNF a úplnou CNF dané formule.
Ať je dána formule φ výrokové logiky. Ať $\{a_1, \ldots, a_s\}$ je seznam všech navzájem různých logických proměnných obsažených ve formuli φ. Předpokládejme, že ve všech pravdivostních tabulkách, o kterých v následujícím budeme mluvit, dodržujeme stejné pořadí řádků.

1. Sestavte pravdivostní tabulku formule φ. Protože je $\{a_1, \ldots, a_s\}$ seznam všech navzájem různých logických proměnných obsažených ve formuli φ, má tato tabulka $r = 2^s$ řádků.

2. **Úplná DNF.** Zaveďte formule f_1 až f_r, které mají následující pravdivostní tabulky: formule f_i ($i \in \{1, \ldots, r\}$) má v pravdivostní tabulce pouze jedinou jedničku a to právě na i-tém řádku pravdivostní tabulky tak, aby každá z formulí f_1 až f_r byla klausule pro DNF.

   Pokud na žádném řádku pravdivostní tabulky formule φ není jednička, úplná DNF formule φ *neexistuje*. Tento případ nastává právě tehdy, když formule φ je kontradikce. *Žádná kontradikce tedy nemá úplnou DNF.*

   Pokud v pravdivostní tabulce formule φ je alespoň jedna jednička, označte jako $\{r_1, \ldots, r_k\}$ $(k \geq 1)$ seznam všech různých řádků pravdivostní tabulky formule φ, na kterých je φ ohodnocena jedničkou.

   Úplnou DNF formule φ dostaneme jako disjunkci

   $$f_{r_1} \vee \ldots \vee f_{r_k}.$$

3. **Úplná CNF.** Zaveďte formule g_1 až g_r, které mají následující pravdivostní tabulky: formule g_i ($i \in \{1, \ldots, r\}$) má v pravdivostní tabulce pouze jedinou nulu a to právě na i-tém řádku pravdivostní tabulky tak, aby každá z formulí g_1 až g_r byla klausule pro CNF.

   Pokud na žádném řádku pravdivostní tabulky formule φ není nula, úplná CNF formule φ *neexistuje*. Tento případ nastává právě tehdy, když formule φ je tautologie. *Žádná tautologie tedy nemá úplnou CNF.*

Pokud v pravdivostní tabulce formule φ je alespoň jedna nula, označte jako $\{r_1, \ldots, r_k\}$ $(k \geq 1)$ seznam všech různých řádků pravdivostní tabulky formule φ, na kterých je φ ohodnocena nulou.

Úplnou CNF formule φ dostaneme jako konjunkci

$$g_{r_1} \wedge \ldots \wedge g_{r_k}.$$

Neefektivita (tj. možná zbytečně velký počet znaků), která se projevila při výpočtu DNF a CNF metodou příkladu 2, byla způsobena následujícím (popíšeme situaci pouze pro DNF, pro CNF je situace analogická):

- Při hledání DNF jsme se zaměřili na *jednotlivé* jedničky v pravdivostní tabulce dané formule φ. Příslušné formule f_i (jejich pravdivostní tabulka obsahovala pouze jednu jedničku) sice měly tu výhodu, že jsme byli každé f_i schopni okamžitě zapsat jako klausuli, ovšem možná by šlo uvažovat o jiných formulích, které by v pravdivostní tabulce měly více jedniček. My bychom pak mohli „vyřídit" více jedniček v pravdivostní tabulce formule φ najednou.

Výše uvedená myšlenka je velmi přitažlivá, má však svá úskalí, na která upozorňuje následující příklad.

Příklad 6 Vezměme opět pravdivostní tabulku pro formuli φ z příkladu 2.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

a uvažujme o prvních dvou jedničkách v posledním sloupci. Kdybychom ukázali, že existuje formule f, která je klausule pro DNF a která má následující pravdivostní tabulku

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

mohli bychom psát DNF pro φ jako $f \vee f_3 \vee f_5 \vee f_7$. Formule f skutečně je klausulí pro DNF, a sice $(\neg a \wedge \neg b)$. Navíc DNF ve tvaru $f \vee f_3 \vee f_5 \vee f_7$ obsahuje zřejmě méně znaků než DNF ve tvaru $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee f_5 \vee f_7$ z příkladu 2. Zdá se, že čím více jedniček budeme mít ve formuli, kterou „pokrýváme" jedničky v pravdivostní tabulce formule φ, tím méně znaků na vyjádření DNF budeme potřebovat.

Uvažujme tedy o formuli h jejíž pravdivostní tabulka vypadá následovně:

a	b	c	h
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Pokud h je klausule pro DNF, budeme pro vyjádření φ potřebovat ještě méně znaků. Narážíme však na následující problém: h *není* (žádnou) klausulí pro DNF! Ukažme to: postupujeme sporem, ať h je klausule pro DNF. Může nastat právě jeden z následujících čtyř případů:

1. h obsahuje tři literály. Pak je buď $h = (a \wedge l_1 \wedge l_2)$ nebo $h = (\neg a \wedge l_1 \wedge l_2)$, kde l_1 a l_2 jsou literály.
   (a) První případ nemůže nastat — na prvním řádku pravdivostní tabulky by pak nemohla být jednička.
   (b) V druhém případě: h nemůže obsahovat literál c (první řádek pravdivostní tabulky) ani literál $\neg c$ (druhý řádek pravdivostní tabulky).

   Předpoklad, že v h jsou tři literály, vede ke sporu.

2. h obsahuje právě dva literály. Zaměříme se na literál, který h neobsahuje. Může nastat právě jeden z následujících tří případů:
   (a) h neobsahuje literál, ve kterém je logická proměnná a. To ale není možné: klausule h pak totiž nemůže obsahovat ani literál b (viz první řádek pravdivostní tabulky), ani literál $\neg b$ (viz třetí řádek pravdivostní tabulky).
   (b) h neobsahuje literál, ve kterém je logická proměnná b. To ale není možné: klausule h pak totiž nemůže obsahovat ani literál c (viz první řádek pravdivostní tabulky), ani literál $\neg c$ (viz druhý řádek pravdivostní tabulky).
   (c) h neobsahuje literál, ve kterém je logická proměnná c. To ale není možné: klausule h pak totiž nemůže obsahovat ani literál b (viz první řádek pravdivostní tabulky), ani literál $\neg b$ (viz třetí řádek pravdivostní tabulky).

   Předpoklad, že v h jsou právě dva literály, vede ke sporu.

3. h obsahuje pouze jeden literál l. Pak $h = l$ a nastává jeden z šesti případů: $h = a$, $h = b$, $h = c$, $h = \neg a$, $h = \neg b$ $h = \neg c$. Z pravdivostní tabulky pro h však plyne, že ani jeden z těchto případů nenastává. To je spor — h nemůže obsahovat právě jeden literál.

4. h neobsahuje žádný literál. Potom je h klausule pro DNF délky nula, neboli $h = \boldsymbol{F}$. Z pravdivostní tabulky ihned plyne, že to není možné.

□

Předchozí příklad naznačuje, že není jednoduché rozhodnout, který vektor nul a jedniček odpovídá přesně jedné klausuli. Uvidíme, že tento problém budeme moci snadno rozhodnout, pokud jednorozměrnou pravdivostní tabulku formule přepíšeme do dvourozměrné tabulky (takové tabulce budeme říkat *Karnaughova mapa*). V Karnaughově mapě pak budeme:

1. Pro DNF pokrývat ty plochy jedniček, které odpovídají klausulím pro DNF.

2. Pro CNF pokrývat ty plochy nul, které odpovídají klausulím pro CNF.

Karnaughovým mapám je věnována další část textu.

3 Karnaughovy mapy

V předchozí části jsme viděli, že jak DNF, tak CNF dané formule nejsou obecně určeny jednoznačně. Navíc metoda výpočtu DNF a CNF, kterou jsme předvedli v příkladu 2, vede na úplné formy, které jako řetězce obsahují maximální možný počet znaků.

Ukážeme nyní způsob výpočtu DNF a CNF, který má tu výhodu, že získáme kontrolu nad počtem znaků ve formách, které nalezneme. Budeme tak například vědět, zda počet znaků v DNF, kterou jsme spočetli, lze dále zmenšit, či nikoli.

Algoritmus této části je opřen o jiný způsob zápisu pravdivostní tabulky formule. Tomuto způsobu zápisu pravdivostní tabulky říkáme *Karnaughova mapa*. Pozor! V tomto textu se zaměříme na tvorbu Karnaughových map pouze pro formule, ve kterých se vyskytují nanejvýš *čtyři* logické proměnné.

Než řekneme, co je Karnaughova mapa obecně, uvedeme příklad.

Příklad 7 Připomeňme pravdivostní tabulku pro formuli φ z příkladu 2.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Tuto pravdivostní tabulku (její poslední sloupec) nyní přepíšeme do matice. Tuto matici si představíme jako „mapu“ v pravoúhlém systému souřadnic, na její svislou osu budeme nanášet ohodnocení proměnné a počínaje 0 (matice tedy bude mít dva řádky) a na její vodorovnou osu budeme nanášet ohodnocení *uspořádané dvojice proměnných bc* počínaje 00 (matice tedy bude mít čtyři sloupce). Navíc budeme při nanášení souřadnic na osy dodržovat následující pravidlo:

(*) sousedí přesně ty souřadnice, které se liší právě v jedné položce.

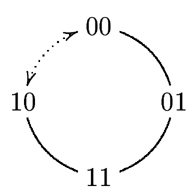
Položky vzniké matice pak obsadíme nulami nebo jedničkami tak, jak nám velí pravdivostní tabulka formule φ. Dostaneme následující matici:

$a\backslash bc$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

(1)

Této matici říkáme Karnaughova mapa formule φ.

Poznamenejme ještě, že pro situaci, kdy je první souřadnice 0, nám pravidlo (*) nedává žádnou možnost volby pořadí souřadnic ve svislém směru: souřadnice 0 podle pravidla (*) musí sousedit se souřadnicí 1 a jiné souřadnice ve svislém směru nejsou. Jiná je situace ve směru vodorovném. Především pro naše pořadí (zleva doprava) 00, 01, 11, 10 pravidlo (*) říká, že spolu mají sousedit i souřadnice 00 a 10. Požadavek (*) nás tedy nutí dívat se na Karnaughovu mapu tak, jako by byla nakreslena na válci, který obdržíme „přilepením“ pravého okraje sloupce 10 k levému okraji sloupce 00:



(2)

Ovšem pořadí vodorovných souřadnic 00, 10, 11, 01 také vyhovuje pravidlu (*). Pro tutéž formuli φ tak dostáváme *jinou* Karnaughovu mapu

$a\backslash bc$	00	10	11	01
0	1	1	0	1
1	1	1	0	0

(3)

Pravidlo (*) nám však opět říká, že souřadnice 00 a 01 spolu sousedí. Na Karnaughovu mapu (3) se tudíž musíme také dívat jako na válcovou plochu, kde jsme tentokrát „slepili“ pravý okraj sloupce 01 s levým okrajem sloupce 00:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 00 \arrow[dr, dash] \arrow[dl, dotted, <->] & \\ 01 & & 10 \arrow[dl, dash] \\ & 11 \arrow[ul, dash] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

Je jasné, že válcové plochy (2) a (4) se od sebe liší pouze orientací: pokud „projdeme“ válcovou plochu (2) proti směru hodinových ručiček, budeme postupně míjet tytéž souřadnice, jako při průchodu válcovou plochou (4) po směru hodinových ručiček. □

Jak napsat Karnaughovu mapu libovolné formule, která obsahuje nanejvýš čtyři logické proměnné.

Ať je dána formule φ výrokové logiky. Ať $\{a_1, \ldots, a_s\}$ je seznam všech navzájem různých logických proměnných obsažených ve formuli φ. Předpokládejme, že jsme již sestavili pravdivostní tabulku formule φ. Protože je $\{a_1, \ldots, a_s\}$ seznam všech navzájem různých logických proměnných obsažených ve formuli φ, má tato tabulka 2^s řádků.

Podle předpokladu je $s \leq 4$. Rozebereme nyní jednotlivé případy.

Pokud je $s = 1$, má naše pravdivostní tabulka 2 řádky a Karnaughovu mapu formule φ *nelze sestavit.*

Pokud je $s = 2$, má pravdivostní tabulka 4 řádky a příslušná Karnaughova mapa má tvar:

$a_1 \backslash a_2$	0	1
0		
1		

kde prázdná čtyři políčka vyplníme tak, jak nám velí pravdivostní tabulka formule φ.

V případě $s = 3$, má Karnaughova mapa tvar:

$a_1 \backslash a_2 a_3$	00	01	11	10
0				
1				

kde prázdných osm políček vyplníme tak, jak nám velí pravdivostní tabulka formule φ. Pozor! Za sousední přitom považujeme právě ta políčka, jejichž souřadnice se liší v jednom bitu. Například „vodorovné“ souřadnice 00 a 10 spolu sousedí.

V případě $s = 4$, má Karnaughova mapa tvar:

$a_1 a_2 \backslash a_3 a_4$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

kde prázdných šestnáct políček vyplníme tak, jak nám velí pravdivostní tabulka formule φ. Pozor! Za sousední přitom považujeme právě ta políčka, jejichž souřadnice se liší v jednom bitu. Například „svislé“ souřadnice 00 a 10 spolu sousedí.

Dvourozměrné tabulce vytvořené podle výše uvedených pravidel říkáme *Karnaughova mapa formule* φ.

Poznámka 8 K definici Karnaughovy mapy nyní přičiníme několik poznámek.

1. V případě, že formule φ obsahuje pouze jednu logickou proměnnou, tj. v případě, kdy $s = 1$, Karnaughovu mapu nelze sestavit. Jak v tomto případě vypadá zjednodušování DNF a CNF?

   Označme jedinou logickou proměnnou, která je ve formuli φ obsažena, písmenem a. Formule φ pak má právě jednu z následujících čtyř pravdivostních tabulek:

a	φ
0	1
1	1

a	φ
0	0
1	1

a	φ
0	1
1	0

a	φ
0	0
1	0

   Probereme podrobně pouze tvorbu DNF, jinak odkazujeme čtenáře na cvičení 19.

   V případě první pravdivostní tabulky je zřejmě $\varphi \models\!\dashv \boldsymbol{T}$. Formuli φ lze tudíž popsat nulovým počtem klausulí pro DNF. Tato forma zřejmě obsahuje nejmenší možný počet znaků, totiž nulový.

   V případě druhé pravdivostní tabulky je $\varphi \models\!\dashv a$. Jde o DNF, která obsahuje jedinou klausuli délky jedna — obsahuje tedy nejmenší počet znaků.

   V případě třetí pravdivostní tabulky je zřejmě $\varphi \models\!\dashv \neg a$. Tudíž formule $(\neg a)$ DNF formule φ a tato forma již zřejmě obsahuje nejmenší možný počet znaků.

   V případě čtvrté pravdivostní tabulky je zřejmě $\varphi \models\!\dashv \boldsymbol{F}$. Formule $\boldsymbol{F}$ je klausule pro DNF, která obsahuje nejmenší možný počet znaků (sice nula znaků). Počet znaků této formy již zřejmě nejde zmenšit.

2. Příklad 7 nás poučil o tom, že v případě tří logických proměnných je třeba chápat Karnaughovu mapu jako „nakreslenou na válci“. Jak chápat Karnaughovy mapy v případě čtyř proměnných? Nyní totiž čelíme problému „slepování“ krajů mapy dvakrát: jak ve směru vodorovném, tak ve směru svislém. Například v následující Karnaughově mapě

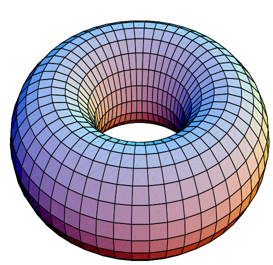
$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

   musíme „slepit“:

   (a) Pravý okraj sloupce 10 s levým okrajem sloupce 00.

   (b) Dolní okraj řádku 10 s horním okrajem sloupce 00.

   Výslednou Karnaughovu mapu je tedy třeba představit si jako nakreslenou na povrchu toru. *Torus* (nebo též *anuloid*) je prostorové těleso, tvarem připomínající nafouklou pneumatiku:



Proč jsme do definice Karnaughovy mapy dali požadavky na sousedění políček, jejichž souřadnice se liší právě v jedné položce? Přesně tyto požadavky totiž umožní v Karnaughově mapě detekovat ty plochy jedniček, které odpovídají klausulím pro DNF, a ty plochy nul, které odpovídají klausulím pro CNF.

3. V případě, že formule φ obsahuje pět a více proměnných, je situace daleko komplikovanější. Odkazujeme na cvičení 22.

□

Zřejmě každou Karnaughovu mapu lze považovat za matici nul a jedniček. Pohled na pravdivostní tabulku jako na (speciálně vytvořenou) matici nám umožní zobecnit postup z příkladu 2. V daném příkladu jsme totiž například úplnou DNF vytvořili tak, že jsme se zaměřili na jednotlivé jedničky v sloupci pravdivostní tabulky. Tento vektor jsme se pak pokoušeli „nakombinovat" pomocí logického součtu a sady „bázických" vektorů. Každý z bázických vektorů přitom odpovídal pravdivostní tabulce jedné klausule pro DNF. Nyní se pokusíme o analogii tohoto postupu pro matice nul a jedniček. Musíme se přitom postarat o následující:

- Musíme vhodně vybrat „bázické" matice, pomocí nichž jsme schopni nakombinovat danou matici (Karnaughovu mapu). Navíc, každá z těchto bázických matic musí odpovídat klausuli.

To je smyslem následující definice:

Definice 9 *Bázická matice jedniček* je taková Karnaughova mapa (chápaná jako matice nul a jedniček), ve které všechny jedničky tvoří obdélník vytvořený ze sousedících políček. Navíc rozměry tohoto obdélníka musí být mocniny čísla dvě.

Bázická matice nul je taková Karnaughova mapa (chápaná jako matice nul a jedniček), ve které všechny nuly tvoří obdélník vytvořený ze sousedících políček. Navíc rozměry tohoto obdélníka musí být mocniny čísla dvě. □

Příklady 10 Uveďme příklady bázických matic a matic, které nejsou bázické. Příslušný obdélník nul nebo jedniček vyznačíme tučně. Předpokládejme, že a, b, c, d jsou logické proměnné.

1. Karnaughova mapa

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

není ani bázickou maticí jedniček ani bázickou maticí nul. Neobsahuje totiž ani obdélník jedniček ani obdélník nul.

2. Karnaughova mapa

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	**1**	0	0	**1**
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

je bázická matice jedniček. Rozměry obdélníka jedniček jsou 1×2.

3. Karnaughova mapa

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	**1**	0	0	**1**
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	**1**	0	0	**1**

je bázická matice jedniček. Rozměry obdélníka jedniček jsou 2×2.

4. Karnaughova mapa

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	**0**	**0**
11	1	1	**0**	**0**
10	1	1	1	1

je bázická matice nul. Rozměry obdélníka nul jsou 2×2.

5. Karnaughova mapa

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	**0**	**0**	**0**
11	1	**0**	**0**	**0**
10	1	1	1	1

není bázická matice nul. Rozměry obdélníka nul jsou 2×3.

6. Karnaughova mapa

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	0	**1**	**1**	**1**
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

není bázická matice jedniček. Rozměry obdélníka jedniček jsou 1×3.

□

Následující tvrzení o souvislosti bázických matic a klausulí uvedeme bez důkazu.

Tvrzení 11 *Platí následující:*

1. *Každá bázická matice jedniček odpovídá právě jedné klausuli pro DNF.*
2. *Každá bázická matice nul odpovídá právě jedné klausuli pro CNF.*

Příklady 12 Uvedeme nyní příklady korespondence klausulí a bázických matic.

1. Bázické matici jedniček

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	0	0	0	**1**
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

odpovídá následující klausule pro DNF: $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d)$.

2. Bázické matici jedniček

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	**1**	0	0	**1**
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

odpovídá následující klausule pro DNF: $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg d)$.

3. Bázické matici jedniček

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	**1**	0	0	**1**
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	**1**	0	0	**1**

odpovídá následující klausule pro DNF: $(\neg b \wedge \neg d)$.

4. Bázické matici nul

$ab\backslash cd$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	**0**	**0**
11	1	1	**0**	**0**
10	1	1	1	1

odpovídá následující klausule pro CNF: $(\neg b \vee \neg c)$.

□

Z předchozího příkladu se zdá zřejmé následující pozorování:

Předpokládejme, že studujeme bázické matice jedniček pevných rozměrů. Pak zřejmě čím větší je obdélník jedniček, tím méně logických proměnných je zapotřebí k zapsání příslušné klausule.

Analogické pozorování se zdá platit pro bázické matice nul. Přesné znění a důkaz příslušného tvrzení vynecháme a zapamatujeme si slogan:

K popisu větší plochy na mapě je třeba méně informace.

Pokud tedy budeme chtít pro danou formuli φ nalézt například CNF, která bude mít co možná nejkratší klausule, budeme muset dodržet dvě věci:

1. Karnaughova mapa formule φ musí být „logickým součinem“ bázických matic nul. (Pak bude zaručeno, že formule φ bude konjunkcí klausulí, které odpovídají použitým bázickým maticím nul.)

2. Každá bázická matice nul, kterou použijeme, musí mít co největší obdélník nul. (Pak bude zaručeno, že každá klausule pro CNF, kterou použijeme, bude obsahovat co nejmenší počet literálů.)

   Takových bázických matic nul musíme použít co nejmenší počet. (Pak bude zaručeno, že CNF fromule φ bude obsahovat co nejmenší počet znaků.)

Definice 13 Ať $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou dvě Karnaughovy mapy stejných rozměrů.

1. *Logickým součtem* $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ myslíme Karnaughovu mapu označenou $\mathbb{A} \boxplus \mathbb{B}$, kterou obdržíme tak, že příslušné položky v jednotlivých mapách logicky sečteme.

   Budeme říkat, že mapa $\mathbb{C}$ je *nakombinována z map* $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ *logickým součtem*, pokud platí $\mathbb{C} = \mathbb{A} \boxplus \mathbb{B}$.

2. *Logickým součinem* $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ myslíme Karnaughovu mapu označenou $\mathbb{A} \boxdot \mathbb{B}$, kterou obdržíme tak, že příslušné položky v jednotlivých mapách logicky vynásobíme.

   Budeme říkat, že mapa $\mathbb{C}$ je *nakombinována z map* $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ *logickým součinem*, pokud platí $\mathbb{C} = \mathbb{A} \boxdot \mathbb{B}$.

□

Příklad 14 Pro následující dvě Karnaughovy mapy

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c||c|c|c|c} ab\backslash cd & 00 & 01 & 11 & 10 \\ \hline\hline 00 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \mathbb{B} = \begin{array}{c||c|c|c|c} ab\backslash cd & 00 & 01 & 11 & 10 \\ \hline\hline 00 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 01 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

je

$$\mathbb{A} \boxplus \mathbb{B} = \begin{array}{c||c|c|c|c} ab\backslash cd & 00 & 01 & 11 & 10 \\ \hline\hline 00 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 01 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{a} \quad \mathbb{A} \boxdot \mathbb{B} = \begin{array}{c||c|c|c|c} ab\backslash cd & 00 & 01 & 11 & 10 \\ \hline\hline 00 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

□

Zřejmě operace $\boxplus$ odpovídá logické spojce $\vee$ a operace $\boxdot$ odpovídá logické spojce $\wedge$. Zformulujme to přesně.

Tvrzení 15 *Ať φ a ψ jsou formule výrokové logiky obsahující stejný počet logických proměnných. Ať $\mathbb{A}$ je Karnaughova mapa formule φ a $\mathbb{B}$ je Karnaughova mapa formule ψ. Potom platí:*

1. $\mathbb{A} \boxplus \mathbb{B}$ *je Karnaughova mapa formule* $\varphi \vee \psi$.
2. $\mathbb{A} \boxdot \mathbb{B}$ *je Karnaughova mapa formule* $\varphi \wedge \psi$.

Definice 16 Řekneme, že DNF (CNF) dané formule je *ireducibilní*, pokud obsahuje nejmenší možný počet znaků. □

Jak najít ireducibilní DNF a ireducibilní CNF dané formuli.
Ať je dána formule φ výrokové logiky.

1. Sestavte Karnaughovu mapu formule φ. Vzniklou matici nul a jedniček označte $\mathbb{A}$.
2. **Ireducibilní DNF.** Jestliže mapa $\mathbb{A}$ obsahuje samé nuly, ireducibilní DNF formule φ je formule $\boldsymbol{F}$ (ireducibilní DNF má jedinou klausuli délky nula).

   Jestliže mapa $\mathbb{A}$ obsahuje samé jedničky, ireducibilní DNF formule φ je formule $\boldsymbol{T}$ (ireducibilní DNF má nulový počet klausulí).

   Pokud nenastane ani jeden z výše uvedených případů, nakombinujte Karnaughovu mapu $\mathbb{A}$ logickým součtem bázických matic jedniček $\mathbb{A}_1, \ldots \mathbb{A}_n$. Dodržujte přitom následující dvě podmínky:

(a) Každá matice $\mathbb{A}_i$ musí mít co největší obdélník jedniček.

(b) Počet matic $\mathbb{A}_i$ (tj. číslo n) musí být co nejmenší.

Nalezněte klausule $f_1, \ldots, f_n$ pro DNF, které odpovídají bázickým maticím $\mathbb{A}_1, \ldots \mathbb{A}_n$. Ireducibilní DNF formule φ je $f_1 \vee \ldots \vee f_n$.

3. **Ireducibilní CNF.** Jestliže mapa $\mathbb{A}$ obsahuje samé jedničky, ireducibilní CNF formule φ je formule $\boldsymbol{T}$ (ireducibilní CNF má jedinou klausuli délky nula).

   Jestliže mapa $\mathbb{A}$ obsahuje samé nuly, ireducibilní CNF formule φ je formule $\boldsymbol{F}$ (ireducibilní CNF má nulový počet klausulí).

   Pokud nenastane ani jeden z výše uvedených případů, nakombinujte Karnaughovu mapu $\mathbb{A}$ logickým součinem bázických matic nul $\mathbb{A}_1, \ldots \mathbb{A}_n$. Dodržujte přitom následující dvě podmínky:

   (a) Každá matice $\mathbb{A}_i$ musí mít co největší obdélník nul.

   (b) Počet matic $\mathbb{A}_i$ (tj. číslo n) musí být co nejmenší.

   Nalezněte klausule $f_1, \ldots, f_n$ pro CNF, které odpovídají bázickým maticím $\mathbb{A}_1, \ldots \mathbb{A}_n$. Ireducibilní CNF formule φ je $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$.

Příklad 17 Nalezněme ireducibilní DNF a ireducibilní CNF formule φ, jejíž Karnaughova mapa vypadá následovně:

$\mathbb{A} =$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

1. **Ireducibilní DNF.** Matici $\mathbb{A}$ lze nakombinovat logickým součtem následujícími bázickými maticemi jedniček:

$\mathbb{A}_1 =$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$\mathbb{A}_2 =$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

Matici $\mathbb{A}$ jsme tedy nakombinovali logickým součtem dvou bázických matic jedniček. Zřejmě nelze matici $\mathbb{A}$ nakombinovat menším počtem bázických matic.

Přesto nám matice $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_2$ nedají ireducibilní DNF formule φ, protože k nakombinování matice $\mathbb{A}$ lze použít i matice

$\mathbb{B}_1 =$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$\mathbb{B}_2 =$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

které mají větší obdélníky jedniček než matice $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_2$. Současně je však vidět, že větší obdélníky jedniček již nenalezneme.

Protože matici $\mathbb{B}_1$ odpovídá klausule $\neg a \wedge \neg b \wedge c$ a matici $\mathbb{B}_2$ odpovídá klausule $\neg a \wedge \neg b \wedge d$, je ireducibilní DNF pro formuli φ následující:

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d).$$

2. **Ireducibilní CNF.** Budeme postupovat trochu rychleji. Matici $\mathbb{A}$ zřejmě nelze logickým součinem nakombinovat jednou bázickou maticí nul. Lze se přesvědčit, že ji nelze nakombinovat ani s použitím dvou bázických matic nul. Lze ji však nakombinovat následujícími třemi maticemi:

$$\mathbb{C}_1 = \begin{array}{c||c|c|c|c} ab\backslash cd & 00 & 01 & 11 & 10 \\ \hline\hline 00 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 01 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \mathbb{C}_2 = \begin{array}{c||c|c|c|c} ab\backslash cd & 00 & 01 & 11 & 10 \\ \hline\hline 00 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\mathbb{C}_3 = \begin{array}{c||c|c|c|c} ab\backslash cd & 00 & 01 & 11 & 10 \\ \hline\hline 00 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 01 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Tři bázické matice nul, které by měly větší obdélníky nul než matice $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ a $\mathbb{C}_3$, však nenalezneme.

Matici $\mathbb{C}_1$ odpovídá klausule $c \vee d$, matici $\mathbb{C}_2$ odpovídá klausule $\neg b$ a matici $\mathbb{C}_3$ odpovídá klausule $\neg a$.

Ireducibilní CNF pro formuli φ je:

$$(c \vee d) \wedge (\neg b) \wedge (\neg a).$$

□

Poznámka 18 Z výše uvedené teorie zřejmě plyne následující:

Pokud Karnaughovu mapu dané formule φ nakombinujeme pomocí bázických matic jedniček a *nebudeme* přitom dodržovat požadavky 2a a 2b ze strany 14 dostaneme samozřejmě opět nějakou DNF formule φ.

Lze se snadno přesvědčit, že pokud budeme Karnaughovu mapu kombinovat pomocí bázických matic jedniček obsahujících *pouze* obdélníky rozměrů 1×1, dostaneme úplnou DNF formule φ.

Podobnou poznámku lze učinit pro CNF. □

4 Cvičení

Cvičení 19 Podrobně projděte postup pro popis ireducibilních CNF pro formuli obsahující pouze jednu logickou proměnnou z poznámky 8. □

Cvičení 20 Více příkladů na toto téma lze nalézt ve cvičeních ke kapitole 8 skripta doc. Marie Demlové a prof. Bedřicha Pondělíčka *Matematická logika*, FEL ČVUT, Praha 1997.

Pro následující formule nalezněte úplnou DNF, úplnou CNF, ireducibilní DNF a ireducibilní CNF.

1. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.
2. $(a \oplus b) \oplus c$.
3. $a \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)$.
4. $(b \vee d) \Leftrightarrow (\neg a \Leftrightarrow c)$.

Výsledky:

1. Úplná DNF: $(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$.
   Úplná CNF této formule neexistuje.
   Ireducibilní DNF: $(a) \vee (\neg a)$ nebo $(b) \vee (\neg b)$.
   Ireducibilní CNF: $\boldsymbol{T}$ (obsahuje jedinou klausuli délky nula).

2. Úplná DNF: $(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$.
   Úplná CNF: $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$.
   Obě úplné formy jsou ireducibilní.

3. Úplná DNF: $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$.
   Ireducibilní DNF: $(\neg a) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (b \wedge c)$.
   Úplná CNF: $(\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$. Tato úplná CNF je ireducibilní.

4. Úplná DNF: $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee$
   $(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$.
   Ireducibilní DNF: $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge c \wedge d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d)$.
   Úplná CNF: $(a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge$
   $(\neg a \vee b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d)$.
   Ireducibilní CNF: $(a \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee d)$.

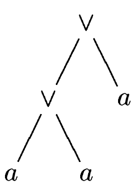
□

Cvičení 21 Toto cvičení vyžaduje znalost derivačních (syntaktických) stromů formulí výrokové logiky — viz kapitola 5 skripta doc. Marie Demlové a prof. Bedřicha Pondělíčka *Matematická logika*, FEL ČVUT, Praha 1997.

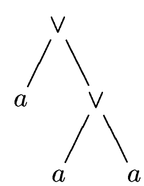
Ukažte, že DNF formule lze ekvivalentně definovat v řeči derivačních stromů formule. Postupujte následovně:

1. Připomeňte si možnost jednoznačného přepisu každé formule na její derivační strom.

   Pozor: víme, že například zápis formule $a \vee a \vee a$ je konvencí za některý z následujících dvou méně přehledných zápisů: $((a \vee a) \vee a)$ nebo $(a \vee (a \vee a))$. Výhodou těchto méně přehledných zápisů je však jednoznačnost přepisu na derivační strom. Derivační strom formule $((a \vee a) \vee a)$ je:

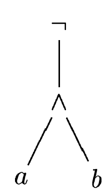
   

   zatímco formule $(a \vee (a \vee a))$ má *jiný* derivační strom:

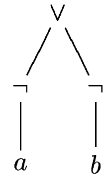
   

2. De Morganova pravidla a distributivní zákony iterpretujte jako „posouvání“ logických spojek po derivačním stromu.

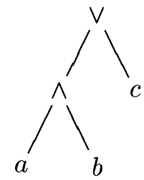
   Například sémantickou ekvivalenci $\neg(a \wedge b) \models\!\!\!| (\neg a \vee \neg b)$ (což je jedno z De Morganových pravidel) lze interpretovat jako „posouvání“ logické spojky $\neg$ po derivačním stromu směrem dolů. Derivační strom formule $\neg(a \wedge b)$ je totiž strom:

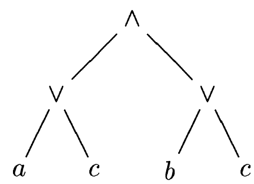
a derivační strom formule $(\neg a \vee \neg b)$ je:



Podobně sémantickou ekvivalenci $(a \wedge b) \vee c \models\!\!\!\!\dashv (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ (což je jeden z distributivních zákonů) lze interpretovat jako „posouvání“ logické spojky $\vee$ po derivačním stromu směrem dolů. Derivační strom formule $(a \wedge b) \vee c$ je totiž strom:



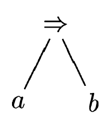
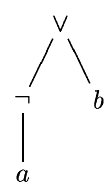
a derivační strom formule $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$ je:



3. Definujte DNF formule jako formuli, jejíž derivační strom má jistý tvar.
4. Promyslete proceduru hledání DNF, která se opírá pouze o tvar derivačních stromů.

   Návod: definujte sadu úprav derivačních stromů:

   (a) Odstraňování nepohodlných logických spojek se děje nahrazením stromů, které obsahují nepohodlné spojky, stromy sémanticky ekvivalentních formulí.

   Například pro spojku $\Rightarrow$ strom  nahraďte stromem 

   (b) Posouvání spojek $\neg$ a $\wedge$ co nejníže po derivačním stromu pomocí De Morganových pravidel a distributivních zákonů.

□

Cvičení 22 V tomto cvičení vysvětlíme tvorbu Karnaughovy mapy pro formuli, která obsahuje pět nebo šest různých logických proměnných. Pro podrobnosti odkazujeme například na knihu

G. E. Hoernes, M. F. Heilweil, *Úvod do Booleovy algebry a navrhování logických obvodů*, SNTL, Praha 1969

V případě, kdy formule φ obsahuje pět logických proměnných $a_1, \ldots, a_5$, vypadá Karnaughova mapa takto:

a_5	0					1				
	$a_1a_2 \backslash a_3a_4$	00	01	11	10	$a_1a_2 \backslash a_3a_4$	00	01	11	10
	00					00				
	01					01				
	11					11				
	10					10				

Povšimněme si, že tato mapa je vlastně „atlasem“ dvou Karnaughových map pro formule obsahující čtyři logické proměnné. Podobně situace vypadá v případě, kdy formule φ obsahuje šest logických proměnných $a_1, \ldots, a_6$:

$a_5\backslash a_6$	0					1				
0	$a_1a_2\backslash a_3a_4$	00	01	11	10	$a_1a_2\backslash a_3a_4$	00	01	11	10
	00					00				
	01					01				
	11					11				
	10					10				
1	$a_1a_2\backslash a_3a_4$	00	01	11	10	$a_1a_2\backslash a_3a_4$	00	01	11	10
	00					00				
	01					01				
	11					11				
	10					10				

V tomto případě jde o „atlas“ čtyř Karnaughových map pro formule se čtyřmi logickými proměnnými.

Zformulujte způsob, kterým je v těchto případech nutné pokrývat Karnaughovy mapy, mají-li výsledné formy obsahovat minimální počet znaků.

Poznamenejme ještě, že pro hledání ireducibilních forem formulí, které obsahují velký počet logických proměnných se používají jiné metody, než je metoda Karnaughových map. O těchto metodách se lze dozvědět například v kapitole 6 knihy

G. Birkhoff, T. O. Bartee, *Aplikovaná algebra*, Alfa, Bratislava 1981

□