

str. 63, př. 1

Je dán trojúhelník ABC s vrcholy $A=[4,6]$, $B=[-4,0]$, $C=[-1,-4]$.

Rovnice přímky AB

$$\overline{AB} = B - A = (-8, -6)$$

$$x = -8t + 4$$

$$y = -6t + 6 \Rightarrow t = -\frac{y}{6} + 1$$

$$x = -8\left(-\frac{y}{6} + 1\right) + 4$$

$$x = \frac{4}{3}y - 8 + 4$$

$$3x - 4y + 12 = 0$$

Rovnice přímky BC

$$\overline{BC} = C - B = (3, -4)$$

$$x = 3t - 4 \Rightarrow t = \frac{x+4}{3}$$

$$y = -4t$$

$$y = -4 \cdot \left(\frac{x+4}{3}\right)$$

$$3y = -4x - 16$$

$$4x + 3y + 16 = 0$$

Rovnice přímky AC

$$\overline{AC} = C - A = (-5, -10)$$

$$x = -5t + 4 \Rightarrow t = -\frac{x}{5} + \frac{4}{5}$$

$$y = -10t + 6$$

$$y = -10 \cdot \left(-\frac{x}{5} + \frac{4}{5}\right) + 6$$

$$y = 2x - 8 + 6$$

$$2x - y - 2 = 0$$

Rovnice těžnice jdoucí vrcholem C

$$\overline{AB} = B - A = (-8, -6)$$

$$C_{střed} = \frac{|A+B|}{2} = [0, 3]$$

$$\overline{CC_{střed}} = C_{střed} - C = (1, 7)$$

$$x = t + 0 \Rightarrow t = x$$

$$y = 7t + 3$$

$$y = 7x + 3$$

$$7x - y + 3 = 0$$

Rovnice výšky spuštěné z bodu A

$$4x + 3y + 16 = 0 - \text{úsečka BC}$$

$$3x - 4y + c = 0 - \text{kolmice k BC}$$

$$12 - 24 + c = 0$$

$$c = 12$$

$$3x - 4y + 12 = 0 - \text{výška}$$

Rovnice úsečky AB je $3x - 4y + 12 = 0$.

Rovnice úsečky BC je $4x + 3y + 16 = 0$.

Rovnice úsečky CA je $2x - y - 2 = 0$.

Rovnice těžnice jdoucí vrcholem C je $7x - y + 3 = 0$.

Rovnice výšky spuštěné z bodu A je $3x - 4y + 12 = 0$.

str. 64, př. 2

$$5x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 5x + 7$$

$$2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

$$k_1 = 5$$

$$k_2 = \frac{2}{3}$$

$$\sphericalangle \alpha = \arctan(5) - \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 45^\circ$$

Odchylka mezi přímkami je 45° .

str. 64, př. 3

Určete rovnici, přímky který prochází bodem $A = [-5, 2]$ a je kolmá na přímkou $4x - y + 3 = 0$.

$$x + 4y + c = 0$$

$$-5 + 8 = c$$

$$c = -3$$

$$x + 4y - 3 = 0$$

Kolnice procházející bodem $A = [-5, 2]$ má rovnici $x + 4y - 3 = 0$.

str. 64, př. 4

Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

$$x + 4y - 3 = 0$$

$$(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 12 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$$S = [-3, -2]$$

$$r = 5$$

Střed kružnice má souřadnice $S = [-3, -2]$ a poloměr $r = 5$.

str. 64, př. 5

Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $K = [3, 0]$ a dotýká se přímky $y = 2x$ v bodě $T = [1, 2]$.

str. 64, př. 6

Určete rovnici tečny kružnice $x^2 + y^2 = 65$, která je kolmá k přímce $3x - 2y + 9 = 0$.

$$x^2 + y^2 = 65$$

$$3x - 2y + 9 = 0$$

$$2x + 3y + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y - \frac{|c|}{2}$$

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\left(-\frac{3}{2}y - \frac{|c|}{2}\right)^2 + y^2 = 65$$

$$36c^2 - 52c^2 + 13520 = 0$$

$$-16c^2 = -13520$$

$$\left(\frac{9}{4}y^2 + 2 \cdot \frac{3y|c|}{4} + \frac{c^2}{4}\right) + y^2 = 65$$

$$c = 13\sqrt{5}$$

$$9y^2 + 6y|c| + c^2 + 4y^2 - 260 = 0$$

Rovnice tečny kolmé k zadané přímce je $2x + 3y + 13\sqrt{5} = 0$

str. 64, př. 7

Určete středovou rovnici elipsy, která prochází bodem $A = [4, 2\sqrt{2}]$, má ohnisko $F = [4, 0]$ a střed $S = [0, 0]$.

$$A = [4, 2\sqrt{2}] \quad e^2 = a^2 - b^2$$

$$F = [4, 0] \Rightarrow e = 4 \quad 16 = a^2 - b^2$$

$$S = [0, 0] \quad a^2 = 16 + b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = \{-8, 16\} \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\frac{4}{16 + b^2} + \frac{8}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 16 + b^2$$

$$a^2 = 32$$

$$16b^2 + 8b^2 = b^4 + 14b^2$$

$$b^4 - 8b^2 - 128 = 0 \quad x = b^2$$

$$x^2 - 8x - 128$$

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$x_{1,2} = \{-8, 16\}$$

Rovnice elipsy je $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$.

str. 64, př. 8

Je dána elipsa $4x^2 + 25y^2 - 24x - 100y + 36 = 0$. Určete střed, délky poloos a excentricitu.

$$\frac{(x - S_x)^2}{a^2} - \frac{(y - S_y)^2}{b^2} = 1$$

$$4x^2 + 25y^2 - 24x - 100y + 36 = 0$$

$$(4x^2 - 24x + 36) - 36 + (25y^2 - 100y + 100) - 100 + 36 = 0$$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 - 4y + 4) = 100$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$a^2 = e^2 + b^2$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \sqrt{21}$$

Rovnice elipsy je $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$, její střed je $S = [3, 2]$ a velikosti poloos jsou $a = 5, b = 2$.

str. 64, př. 9

Určete průsečíky elipsy $x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 4 = 0$ s přímkou $3x - 2y + 2 = 0$.

$$x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 4 = 0$$

$$3x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$$

$$x^2 + 4\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2 + 8x - 8\left(\frac{3}{2}x + 1\right) + 4 = 0$$

$$x^2 + 4\left(\frac{9}{4}x^2 + \frac{6}{2}x + 1\right) + 8x - 12x - 8 + 4 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 + 12x + x + 8x - 12x - 8 + 4 = 0$$

$$10x^2 + 8x = 0$$

$$x \cdot (5x + 4) = 0$$

$$x_{1,2} = \left\{ -\frac{4}{5}, 0 \right\}$$

$$P_1 = \left[-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5} \right]$$

$$P_2 = [0, 1]$$

Průsečíky jsou $P_1 = \left[-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5} \right]$ a $P_2 = [0, 1]$.

str. 64, př. 10

Určete střed, ohniska, délky poloos a rovnice asymptot hyperboly

$$\frac{(x - S_x)^2}{a^2} - \frac{(y - S_y)^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 4y^2 = 4$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

$$S = [-3, 0]$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$(y - y_0) = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

$$y = \pm \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$e = \sqrt{5}$$

$$F = [\pm e - x_0, 0]$$

$$F = [-3 \pm \sqrt{5}, 0]$$

Střed hyperboly je $S = [-3, 0]$, ohniska jsou $F = [-3 \pm \sqrt{5}, 0]$ a délky poloos jsou $a = 2, b = 1$.

str. 64, př. 11

Napište rovnici tečny paraboly $y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$ rovnoběžné s přímkou $x + 4y - 4 = 0$.

$$D = 0$$

$$y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$x + 4y \pm c = 0 \Rightarrow x = -4y \pm c$$

$$64 - 4(1 \cdot (\pm 3c - 8)) = 0$$

$$y^2 + 3(-4y - c) + 4y - 8 = 0$$

$$64 \pm 12c + 32 = 0$$

$$y^2 - 12y \pm 3c + 4y - 8 = 0$$

$$\pm c = \frac{96}{12}$$

$$y^2 - 8y \pm 3c - 8 = 0$$

$$c = \pm 8$$

$$y^2 - 8y - 3(\pm 8) - 8 = 0$$

$$c = -8, \quad 8y^2 - 8y + 16 = 0, D = 0 \Rightarrow \text{tečna}$$

$$c = 8, \quad y^2 - 8y - 32 = 0, D > 0 \Rightarrow \text{sečna}$$

Rovnice tečny je $x + 4y - 8 = 0$.