Zadání A

1. Řešte diferenciální rovnici
$$y' + \frac{y+3}{\operatorname{cotg} x} = 0, \quad \text{kde} \quad y(\frac{\pi}{3}) = -1.$$

Řešení:
$$y' = -\frac{y+3}{\operatorname{cotg} x},$$
tedy $f(x) = \frac{-1}{\operatorname{cotg} x}$, funkce je spojitá pro $x \in (\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}), k \ \in \mathbb{Z}$,
$g(y) = y+3$, funkce je spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, nulová pro $y = -3$.

Po separaci proměnných získáváme
$$\begin{aligned} \frac{dy}{y+3} &= \frac{-dx}{\operatorname{cotg} x} \\ \ln|y+3| &= \ln|\cos x| + \ln|c| \\ y &= c \cdot \cos x - 3, \quad \text{kde} \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$
Po dosazení počátečních podmínek
$$\begin{aligned} -1 &= c \cdot \tfrac{1}{2} - 3 \\ c &= 4 \end{aligned}$$
Řešením je tedy funkce
$$y = 4 \cdot \cos x - 3, \quad \text{kde} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

2. Najděte obecný tvar řešení diferenciální rovnice
$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Řešení:

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Nejprve řešíme přidruženou homogenní LDR. Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 + 1$ jsou $i, -i$, fundamentální systém tedy tvoří funkce $\sin x$ a $\cos x$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou variace konstant ve tvaru $\hat{y} = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x$.

Získáváme soustavu
$$\begin{aligned} c_1' \cdot \sin x + c_2' \cdot \cos x &= 0 \\ c_1' \cdot \cos x - c_2' \cdot \sin x &= \tfrac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$
jejímž řešením je $c_1' = 1, c_2' = \frac{-\sin x}{\cos x}$, tedy $c_1 = x, c_2 = \ln|\cos x|$ pro $x \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}), k \ \in \mathbb{Z}$. Obecný tvar řešení této diferenciální rovnice je tedy
$$y = x sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + c_1 sin x + c_2 \cos x, \quad \text{kde} \quad x \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}), k \ \in \mathbb{Z}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Řešte diferenciální rovnici
$$y'' + 3y' + 2y = -2e^{-2x} + 10 \sin x, \quad \text{kde} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 4.$$

Řešení:

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Nejprve řešíme přidruženou homogenní LDR. Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ jsou $-1, -2$, fundamentální systém tedy tvoří funkce e^{-x} a e^{-2x}. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou odhadu ve tvaru $\hat{y} = Axe^{-2x} + B \sin x + C \cos x$.

Spočítáme derivace
$$\begin{aligned} \hat{y}' &= Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} + B \cos x - C \sin x \\ \hat{y}'' &= -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} - B \sin x - C \cos x \end{aligned}$$
Po dosazení a úpravě získáme soustavu
$$\begin{aligned} -A &= -2 \\ B - 3C &= 10 \\ 3B + C &= 0, \end{aligned}$$
jejímž řešením je $A = 2, B = 1, C = -3$.

Obecný tvar řešení je tedy
$$\begin{aligned} y &= 2xe^{-2x} + \sin x - 3 \cos x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \\ y' &= 2e^{-2x} - 4xe^{-2x} + \cos x + 3 \sin x - c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Po dosazení počátečních podmínek získáváme soustavu $\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 0 \\ -c_1 - 2c_2 & = & 1, \end{array}$

jejímž řešením je $c_1 = 1, c_2 = -1$.
Řešením rovnice je funkce

$$y = 2xe^{-2x} + \sin x - 3\cos x + e^{-x} - e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = f(t), \quad \text{kde} \quad y(0_+) = 1, \quad y'(0_+) = 0,$$

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{2t}\sin t, & \text{pro } t \in (0, \pi), \\ 0, & \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus (0, \pi). \end{cases}$$

Řešení:
$f(t) = 2e^{2t}\sin t \cdot (H(t) - H(t-\pi)) = 2e^{2t}\sin t \cdot H(t) - 2e^{2t}\sin t \cdot H(t-\pi) =$
$= 2e^{2t}\sin t \cdot H(t) - 2e^{2(t-\pi)+2\pi}\sin((t-\pi)+\pi) \cdot H(t-\pi) = 2e^{2t}\sin t \cdot H(t) + 2e^{2\pi}e^{2(t-\pi)}\sin(t-\pi) \cdot H(t-\pi)$,
tedy $\mathcal{L}\{f\} = \frac{2}{(p-2)^2+1} \cdot (1 + e^{2\pi} \cdot e^{-\pi p})$.
Transformovaná rovnice je ve tvaru:

$$p^2Y - p - 3pY + 3 + 2Y = \frac{2}{(p-2)^2+1} \cdot (1 + e^{2\pi} \cdot e^{-\pi p}),$$

odtud
$$\begin{aligned} Y &= \tfrac{p-3}{p^2-3p+2} + \tfrac{2}{(p^2-4p+5)(p^2-3p+2)} \cdot (1 + e^{2\pi}e^{-\pi p}) \\ Y &= \tfrac{2}{p-1} - \tfrac{1}{p-2} + \left(\tfrac{-1}{p-1} + \tfrac{2}{p-2} + \tfrac{-p+1}{p^2-4p+5} \cdot\right)(1 + e^{2\pi}e^{-\pi p}) \\ y &= (2e^t - e^{2t} - e^t + 2e^{2t} - e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t) \cdot H(t) + \\ &\quad + e^{2\pi}\big(2e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi} - e^{2(t-\pi)}\cos(t-\pi) - e^{2(t-\pi)}\sin(t-\pi)\big) \cdot H(t-\pi) \end{aligned}$$

Řešením je tedy funkce $y(t)$ definovaná takto:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \le 0, \\ e^t + e^{2t} - e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t, & \text{pro } t \in (0, \pi), \\ e^t + e^{2t} - e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t - e^{\pi}e^t + 2e^{2t} + e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t = & \\ = 3e^{2t} + (1 - e^{\pi})e^t, & \text{pro } t \ge \pi. \end{cases}$$

Zadání B.

1. Řešte diferenciální rovnici
$$xy' = (1+y^2)\operatorname{arctg} y, \quad \text{kde} \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Řešení:
$$y' = \frac{(1+y^2)\operatorname{arctg} y}{x},$$
tedy $f(x) = \frac{1}{x}$, funkce je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, \infty)$,
$g(y) = (1+y^2)\operatorname{arctg} y$, funkce je spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, nulová pro $y = 0$.

Po separaci proměnných získáváme
$$\begin{aligned} \frac{dy}{(1+y^2)\operatorname{arctg} y} &= \frac{dx}{x} \\ \ln|\operatorname{arctg} y| &= \ln|x| + \ln|c| \\ \operatorname{arctg} y &= c \cdot x \\ y &= \operatorname{tg} cx \end{aligned}$$

Po dosazení počátečních podmínek
$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{tg} c\tfrac{\pi}{2} \\ c &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Řešením je tedy funkce
$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \text{kde} \quad x \in (0, \pi).$$

2. Najděte obecný tvar řešení diferenciální rovnice
$$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$$

Řešení:

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Nejprve řešíme přidruženou homogenní LDR. Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 - 1$ jsou $1, -1$, fundamentální systém tedy tvoří funkce e^{-x} a e^x. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou variace konstant ve tvaru $\hat{y} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$.

Získáváme soustavu
$$\begin{aligned} c_1' \cdot e^x + c_2' \cdot e^{-x} &= 0 \\ c_1' \cdot e^x - c_2' \cdot e^{-x} &= \tfrac{2e^x}{e^x-1}, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $c_1' = \frac{1}{e^x-1}, c_2' = \frac{-e^{2x}}{e^x-1}$, tedy $c_1 = \ln|e^x-1| - x, c_2 = -\ln|e^x-1| - e^x$ pro $x \in (-\infty, 0), x \in (0, \infty)$.
Obecný tvar řešení této diferenciální rovnice je tedy
$$y = e^x(\ln|e^x-1| - x) - e^{-x}(\ln|e^x-1| + e^x) + c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad \text{kde} \quad x \in (-\infty, 0) \quad \text{nebo} \quad x \in (0, \infty), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Řešte diferenciální rovnici
$$y'' + y' - 2y = 6e^{-2x} + 10\cos x, \quad \text{kde} \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$$

Řešení:

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Nejprve řešíme přidruženou homogenní LDR. Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 + \lambda - 2$ jsou $1, -2$, fundamentální systém tedy tvoří funkce e^x a e^{-2x}. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou odhadu ve tvaru $\hat{y} = Axe^{-2x} + B\sin x + C\cos x$.

Spočítáme derivace
$$\begin{aligned} \hat{y}' &= Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} + B\cos x - C\sin x \\ \hat{y}'' &= -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} - B\sin x - C\cos x \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě získáme soustavu
$$\begin{aligned} -3A &= 6 \\ -3B - C &= 0 \\ B - 3C &= 10, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $A = -2, B = 1, C = -3$.

Obecný tvar řešení je tedy
$$\begin{aligned} y &= -2xe^{-2x} + \sin x - 3\cos x + c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, x \in \mathbb{R}. \\ y' &= -2e^{-2x} + 4xe^{-2x} + \cos x + 3\sin x + c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Po dosazení počátečních podmínek získáváme soustavu
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ c_1 - 2c_2 &= -1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $c_1 = 1, c_2 = 1$.
Řešením rovnice je funkce

$$y = -2xe^{-2x} + \sin x - 3\cos x + e^x + e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = f(t), \quad \text{kde} \quad y(0_+) = -1, \quad y'(0_+) = 0,$$

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{2t}\cos t, & \text{pro } t \in (0, \pi), \\ 0, & \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus (0, \pi). \end{cases}$$

Řešení:

$f(t) = 2e^{2t}\cos t \cdot (H(t) - H(t-\pi)) = 2e^{2t}\cos t \cdot H(t) - 2e^{2t}\cos t \cdot H(t-\pi) =$
$= 2e^{2t}\cos t \cdot H(t) - 2e^{2(t-\pi)+2\pi}\cos((t-\pi)+\pi) \cdot H(t-\pi) = 2e^{2t}\cos t \cdot H(t) + 2e^{2\pi}e^{2(t-\pi)}\cos(t-\pi) \cdot H(t-\pi),$
tedy $\mathcal{L}\{f\} = \frac{2(p-2)}{(p-2)^2+1} \cdot (1 + e^{2\pi} \cdot e^{-\pi p})$.
Transformovaná rovnice je ve tvaru:

$$p^2 Y + p - 3pY - 3 + 2Y = \frac{2(p-2)}{(p-2)^2+1} \cdot (1 + e^{2\pi} \cdot e^{-\pi p}),$$

odtud
$$\begin{aligned} Y &= \tfrac{-p+3}{p^2-3p+2} + \tfrac{2p-4}{(p^2-4p+5)(p^2-3p+2)} \cdot (1 + e^{2\pi}e^{-\pi p}) \\ Y &= \tfrac{-2}{p-1} + \tfrac{1}{p-2} + \left(\tfrac{1}{p-1} + \tfrac{0}{p-2} + \tfrac{-p+3}{p^2-4p+5} \cdot\right)(1 + e^{2\pi}e^{-\pi p}) \\ y &= (-2e^t + e^{2t} + e^t - e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t) \cdot H(t) + \\ &\quad + e^{2\pi}\left(e^{t-\pi} - e^{2(t-\pi)}\cos(t-\pi) + e^{2(t-\pi)}\sin(t-\pi)\right)H(t-\pi) \end{aligned}$$

Řešením je tedy funkce $y(t)$ definovaná takto:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \le 0, \\ -e^t + e^{2t} - e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t, & \text{pro } t \in (0, \pi), \\ -e^t + e^{2t} - e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t + e^{\pi}e^t + e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t = & \\ = e^{2t} - (1 - e^{\pi})e^t, & \text{pro } t \ge \pi. \end{cases}$$

Zadání C.

1. Najděte obecný tvar řešení diferenciální rovnice

$$xy' + y \ln y = 0.$$

Řešení:

$$y' = -\frac{y \ln y}{x},$$

tedy $f(x) = \frac{-1}{x}$, funkce je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, \infty)$,
$g(y) = y \ln y$, funkce je spojitá pro všechna $y \in (0, \infty)$, nulová pro $y = 1$.

Po separaci proměnných získáváme
$$\begin{aligned} \frac{dy}{y \ln y} &= \frac{-dx}{x} \\ \ln|\ln y| &= -\ln|x| + \ln|c| \\ \ln y &= \frac{c}{x} \\ y &= e^{\frac{c}{x}} \end{aligned}$$

Obecný tvar řešení je tedy

$$y = e^{\frac{c}{x}}, \quad \text{kde} \quad x \in (-\infty, 0) \quad \text{nebo} \quad x \in (0, \infty), \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Řešte diferenciální rovnici

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2, \quad \text{kde} \quad y(1) = 4.$$

Řešení:

$$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$$

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Nejprve řešíme přidruženou homogenní LDR metodou separace proměnných.

$$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 0$$

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$,
$g(y) = y$, funkce je spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, nulová pro $y = 0$.

Po separaci proměnných získáváme
$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{2x dx}{1+x^2} \\ \ln|y| &= \ln|1 + x^2| + \ln|c| \\ y &= c \cdot (1 + x^2) \end{aligned}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou variace konstanty ve tvaru $\hat{y} = c \cdot (1 + x^2)$.

Získáváme rovnici $c' \cdot (1 + x^2) = (1 + x^2)$, jejímž řešením je $c' = 1$, tedy $c = x$.

Obecný tvar řešení této diferenciální rovnice je tedy $y = x(1 + x^2) + c(1 + x^2)$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Po dosazení počáteční podmínky
$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2c \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Řešením je tedy funkce

$$y = (x + 1)(x^2 + 1), \quad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' - 2y = 6e^{2x} + 20 \sin 2x, \quad \text{kde} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Řešení:

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Nejprve řešíme přidruženou homogenní LDR. Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 - \lambda - 2$ jsou $-1, 2$, fundamentální systém tedy tvoří funkce e^{-x} a e^{2x}. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou odhadu ve tvaru $\hat{y} = Axe^{2x} + B \sin 2x + C \cos 2x$.

Spočítáme derivace
$$\begin{aligned} \hat{y}' &= Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + 2B \cos 2x - 2C \sin 2x \\ \hat{y}'' &= 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 4B \sin 2x - 4C \cos 2x \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě získáme soustavu
$$\begin{aligned} 3A &= 6 \\ -6B+2C &= 20 \\ -2B-6C &= 0, \end{aligned}$$
jejímž řešením je $A = 2, B = -3, C = 1$.

Obecný tvar řešení je tedy
$$\begin{aligned} y &= 2xe^{2x} - 3\sin 2x + \cos 2x + c_1e^{-x} + c_2e^{2x}, x \in \mathbb{R}. \\ y' &= 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 6\cos 2x - 2\sin 2x - c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x} \end{aligned}$$
Po dosazení počátečních podmínek získáváme soustavu
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 + 2c_2 &= 6, \end{aligned}$$
jejímž řešením je $c_1 = -2, c_2 = 2$.
Řešením rovnice je funkce
$$y = 2xe^{2x} - 3\sin 2x + \cos 2x - 2e^{-x} + 2e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Řešte diferenciální rovnici
$$y'' + 3y' + 2y = f(t), \quad \text{kde} \quad y(0_+) = 1, \quad y'(0_+) = 1,$$
$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}\cos t, & \text{pro } t \in (0,\pi), \\ 0, & \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus (0,\pi). \end{cases}$$

Řešení:
$f(t) = 2e^{-2t}\cos t \cdot (H(t) - H(t-\pi)) = 2e^{-2t}\cos t \cdot H(t) - 2e^{-2t}\cos t \cdot H(t-\pi) =$
$= 2e^{-2t}\cos t \cdot H(t) - 2e^{-2(t-\pi)-2\pi}\cos((t-\pi)+\pi)\cdot H(t-\pi) = 2e^{-2t}\cos t \cdot H(t) + 2e^{-2\pi}e^{-2(t-\pi)}\cos(t-\pi)\cdot H(t-\pi)$,
tedy $\mathcal{L}\{f\} = \frac{2(p+2)}{(p+2)^2+1} \cdot (1 + e^{-2\pi} \cdot e^{-\pi p})$.

Transformovaná rovnice je ve tvaru:
$$p^2Y - p - 1 + 3pY - 3 + 2Y = \frac{2(p+2)}{(p+2)^2+1} \cdot (1 + e^{-2\pi} \cdot e^{-\pi p}),$$
odtud
$$\begin{aligned} Y &= \tfrac{p+4}{p^2+3p+2} + \tfrac{2p+4}{(p^2+4p+5)(p^2+3p+2)} \cdot (1 + e^{-2\pi}e^{-\pi p}) \\ Y &= \tfrac{3}{p+1} - \tfrac{2}{p+2} + \left(\tfrac{1}{p+1} + \tfrac{0}{p-2} + \tfrac{-p-3}{p^2+4p+5}\cdot\right)(1 + e^{-2\pi}e^{-\pi p}) \\ y &= (3e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t}\cos t - e^{-2t}\sin t) \cdot H(t) + \\ &\quad + e^{-2\pi}\big(e^{-(t-\pi)} - e^{-2(t-\pi)}\cos(t-\pi) - e^{-2(t-\pi)}\sin(t-\pi)\big) \cdot H(t-\pi) \end{aligned}$$
Řešením je tedy funkce $y(t)$ definovaná takto:
$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \leq 0, \\ 4e^{-t} - 2e^{-2t} - e^{-2t}\cos t - e^{-2t}\sin t, & \text{pro } t \in (0,\pi), \\ 4e^{-t} - 2e^{-2t} - e^{-2t}\cos t - e^{-2t}\sin t + e^{-\pi}e^{-t} + e^{-2t}\cos t + e^{-2t}\sin t = & \\ = -2e^{-2t} + (4 + e^{-\pi})e^{-t}, & \text{pro } t \geq \pi. \end{cases}$$

Zadání D.

1. Najděte obecný tvar řešení diferenciální rovnice

$$xyy' = \sqrt{y^2+1}.$$

Řešení:

$$y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{yx},$$

tedy $f(x) = \frac{1}{x}$, funkce je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in ((0, \infty)$,
$g(y) = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$, funkce je spojitá a nenulová pro všechna $y \in (-\infty, 0)$ a pro $y \in (0, \infty)$.

Po separaci proměnných získáváme
$$\begin{aligned} \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} &= \frac{dx}{x} \\ \sqrt{y^2+1} &= \ln|x| + \ln|c| \\ y^2+1 &= \ln^2|cx| \\ |y| &= \sqrt{\ln^2|cx| - 1} \end{aligned}$$

Obecný tvar řešení je tedy

$$|y| = \sqrt{\ln^2|cx| - 1}, \quad \text{kde} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

definiční obor závisí na konstantě c ($|\ln|cx|| \geq 1$).

2. Řešte diferenciální rovnici

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad \text{kde} \quad y(1) = 3e^{-1}.$$

Řešení:

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Nejprve řešíme přidruženou homogenní LDR metodou separace proměnných.

$$y' + 2xy = 0$$

$f(x) = -2x$, funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$,
$g(y) = y$, funkce je spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, nulová pro $y = 0$.

Po separaci proměnných získáváme
$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -2x\,dx \\ \ln|y| &= -x^2 + \ln|c| \\ y &= c \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou variace konstanty ve tvaru $\hat{y} = c \cdot e^{-x^2}$.

Získáváme rovnici $c' \cdot e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$ jejímž řešením je $c' = 2x$, tedy $c = x^2$.

Obecný tvar řešení této diferenciální rovnice je tedy $y = x^2e^{-x^2} + ce^{-x^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$, $\quad c \in \mathbb{R}$.

Po dosazení počáteční podmínky
$$\begin{aligned} 3e^{-1} &= e^{-1} + ce^{-1} \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Řešením je tedy funkce

$$y = (x^2+2)e^{-x^2}, \quad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} - 20\cos 2x, \quad \text{kde} \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 5.$$

Řešení:

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Nejprve řešíme přidruženou homogenní LDR. Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ jsou $1, 2$, fundamentální systém tedy tvoří funkce e^x a e^{2x}. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou odhadu ve tvaru $\hat{y} = Axe^{2x} + B\sin 2x + C\cos 2x$.

Spočítáme derivace
$$\begin{aligned} \hat{y}' &= Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + 2B\cos 2x - 2C\sin 2x \\ \hat{y}'' &= 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 4B\sin 2x - 4C\cos 2x \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě získáme soustavu
$$\begin{aligned} A &= 3 \\ -2B+6C &= 0 \\ -6B-2C &= -20, \end{aligned}$$
jejímž řešením je $A=3, B=3, C=1$.

Obecný tvar řešení je tedy
$$\begin{aligned} y &= 3xe^{2x}+3\sin 2x+\cos 2x+c_1e^x+c_2e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R}. \\ y' &= 3e^{2x}+6xe^{2x}+6\cos 2x-2\sin 2x+c_1e^x+2c_2e^{2x} \end{aligned}$$
Po dosazení počátečních podmínek získáváme soustavu
$$\begin{aligned} c_1+c_2 &= -3 \\ c_1+2c_2 &= -4, \end{aligned}$$
jejímž řešením je $c_1=-2, c_2=-1$.
Řešením rovnice je funkce
$$y=3xe^{2x}+3\sin 2x+\cos 2x-2e^x-e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

4. Řešte diferenciální rovnici
$$y''+3y'+2y=f(t), \quad \text{kde} \quad y(0_+)=-1, \quad y'(0_+)=-1,$$
$$f(t)=\begin{cases} 2e^{-2t}\sin t, & \text{pro } t\in(0,\pi), \\ 0, & \text{pro } t\in\mathbb{R}\setminus(0,\pi). \end{cases}$$

Řešení:
$f(t)=2e^{-2t}\sin t\cdot(H(t)-H(t-\pi))=2e^{-2t}\sin t\cdot H(t)-2e^{-2t}\sin t\cdot H(t-\pi)=$
$=2e^{-2t}\sin t\cdot H(t)-2e^{-2(t-\pi)-2\pi}\sin((t-\pi)+\pi)\cdot H(t-\pi)=2e^{-2t}\sin t\cdot H(t)+2e^{-2\pi}e^{-2(t-\pi)}\sin(t-\pi)\cdot H(t-\pi)$,
tedy $\mathcal{L}\{f\}=\frac{2}{(p+2)^2+1}\cdot(1+e^{-2\pi}\cdot e^{-\pi p})$.

Transformovaná rovnice je ve tvaru:
$$p^2Y+p+1+3pY+3+2Y=\frac{2}{(p+2)^2+1}\cdot(1+e^{-2\pi}\cdot e^{-\pi p}),$$
odtud
$$\begin{aligned} Y &= \tfrac{-p-4}{p^2+3p+2}+\tfrac{2}{(p^2+4p+5)(p^2+3p+2)}\cdot(1+e^{-2\pi}e^{-\pi p}) \\ Y &= \tfrac{-3}{p+1}+\tfrac{2}{p+2}+\left(\tfrac{1}{p+1}-\tfrac{2}{p-2}+\tfrac{p+1}{p^2+4p+5}\right)(1+e^{-2\pi}e^{-\pi p}) \\ y &= (-3e^{-t}+2e^{-2t}+e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-2t}\cos t-e^{-2t}\sin t)\cdot H(t)+ \\ &\quad +e^{-2\pi}\big(e^{-(t-\pi)}-2e^{-2(t-\pi)}+e^{-2(t-\pi)}\cos(t-\pi)-e^{-2(t-\pi)}\sin(t-\pi)\big)\cdot H(t-\pi) \end{aligned}$$
Řešením je tedy funkce $y(t)$ definovaná takto:
$$y(t)=\begin{cases} 0, & \text{pro } t\le 0, \\ -2e^{-t}+e^{-2t}\cos t-e^{-2t}\sin t, & \text{pro } t\in(0,\pi), \\ -2e^{-t}+e^{-2t}\cos t-e^{-2t}\sin t+e^{-\pi}e^{-t}-2e^{-2t}-e^{-2t}\cos t+e^{-2t}\sin t= & \\ =-2e^{-2t}+(-2+e^{-\pi})e^{-t}, & \text{pro } t\ge\pi. \end{cases}$$