MATEMATIKA 2

SKRIPTA: P. PTÁK: Diferenciální rovnice. Laplaceova transformace
HAMHALTER, TIŠER: Dif. počet fcí více proměnných
L. PRŮCHA: Řady

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad F: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

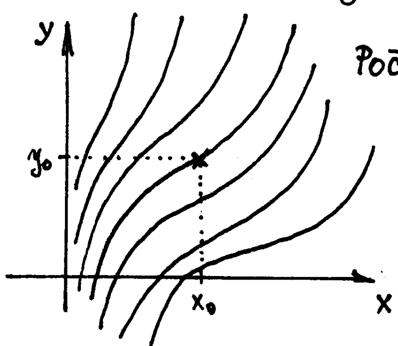
Příklad:

$y''\cdot y + x^2 \ln y - 1 = 0$, $y' - y^2 + xy - 1 = 0$, $2xy' - y^2 + 1 = 0$, $xy' + y - 1 = 0$

řešení na I: $y(x)$: $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$, $x \in I$

maximální řešení – největší řešení na intervalu

jednoznačnost řešení ... y_1 na I_1, y_2 na I_2 : $x \in I_1 \cap I_2$, existuje $x \in I \subset I_1 \cap I_2$ a na něm $y_1 = y_2$



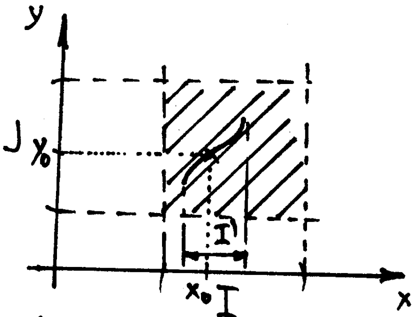
Počáteční podmínka

$y(x_0) = y_{0,0}$

$y'(x_0) = y_{1,0}$

$y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$

Dif. rovnice + poč. podmínky = Cauchyova úloha



DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

$F(x, y, y') = 0$, speciální případ $y' = f(x, y)$

Věta: Nechť f je spojitá na kartézském součinu $I \times J$, $(x_0, y_0) \in I \times J$. Pak Cauchyova úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ má řešení na $I' \subset I$.
Je-li $\frac{\partial f}{\partial y}$ omezená na $I \times J$, pak je jednoznačné.

Příklad:

1. $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$; g, h spojité; $\frac{\partial f}{\partial y} = g(x) \cdot h'(y)$
2. $f(x, y) = p(x) \cdot y + q(x)$; p, q spojité; $\frac{\partial f}{\partial y} = p(x)$

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

$y' = f(x) \cdot g(y)$, f spojitá na I, g spojitá na J

1. $g(y_1) = 0$ ... stacionární řešení $y(x) = y_1$ na I
2. $g(y) \neq 0$: $\frac{y'}{g(y)} = g(x)$, $\int \frac{y'}{g(y(x))} dx = \int f(x)\, dx$

Počáteční podmínky: určit c nebo $\displaystyle\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$

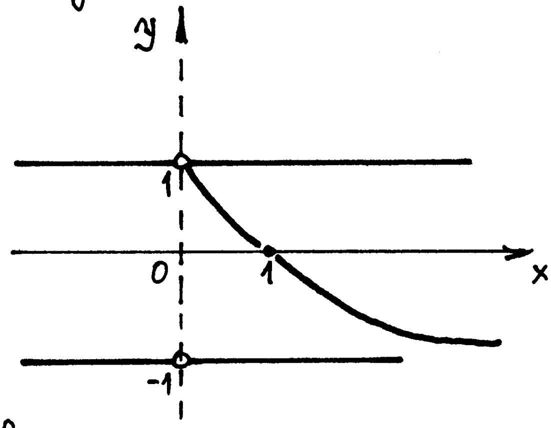
Příklad:

A. vyšetřit intervaly spojitosti g, h

B. stacionární řešení

C. řešení separací proměnných

$$y' = \frac{y^2-1}{2x}, \quad y(1) = 0$$



(A) $y' = \frac{y^2-1}{2x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2-1}{2}$

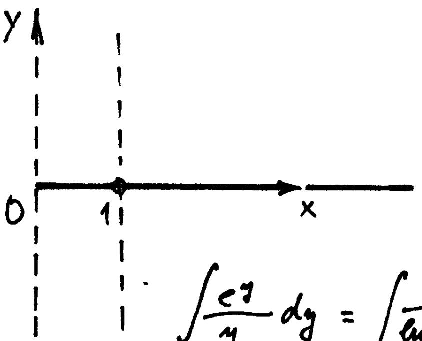
(B) $\frac{y^2-1}{2} = 0 \;\dots\; y_{1,2} = \pm 1$

(C) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2-1}{2} \;\Big/ \int \cdot\, dx \cdot \frac{2}{y^2-1}$

$$\int \frac{2\,dy}{y^2-1} = \int \frac{1}{x}\,dx, \quad 2\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \ln|x|, \quad 2\cdot\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln|x| + c$$

Poč. podm. $x = 1,\ y = 0$: $2\ln\left|-\frac{1}{1}\right| = 0 + c, \quad c = 0 \quad 2\cdot\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln|x|$

Př.: $y' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{y}{e^y}$



$y = 0$ - stacionární řešení

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{y}{e^y}$$

$$\int \frac{e^y}{y}\,dy = \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

NELZE VYJÁDŘIT ELEM. FUNKCÍ

Př.: $y' = y^2 - xy + 1$ NELZE SEPAROVAT

$y(1) = 1$

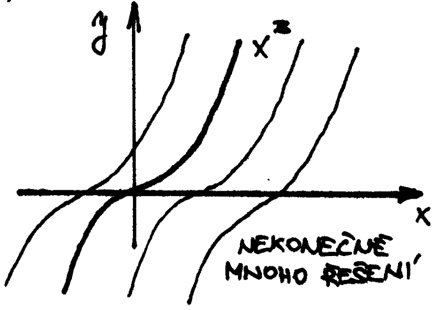
Řešení $y(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$

Př.: $y' = 3\,y^{2/3} \cdot 1$

$y(0) = 0$

STAC. ŘEŠENÍ:

$y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$



$$\frac{dy}{dx} = 3\,y^{2/3}$$

$$\int \frac{1}{3}\,y^{-2/3}\,dy = \int dx$$

$y^{1/3} = x + c$

$y(x) = (x+c)^3, \quad x \in \mathbb{R}$

$c = 0: \quad y(x) = x^3$

$$g(x) \cdot h(y) = 1 \cdot 2\,y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

zapisuje se ve tvaru: $a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$; a_1, a_0, f - spojité na I, $a_1(x) \neq 0$

$D: y(x) \longmapsto a_1(x)\cdot y'(x) + a_0(x)y(x)$

└ lineární zobrazení

$$D(Ay+Bz) = a_1(x)\left(Ay(x)+Bz(x)\right)' + a_0(x)\cdot\left(A(y(x)) + Bz(x)\right) =$$
$$= a_1(x)\left(Ay'(x)+Bz'(x)\right) + a_0(x)\cdot\left(Ay(x)+Bz(x)\right) = A\left(a_1(x)\cdot y'(x) + a_0(x)\cdot y(x)\right) +$$
$$+ B\left(a_1(x)\cdot z'(x) + a_0(x)z(x)\right) = A\cdot D(y) + B\cdot D(z) \Rightarrow \text{je lineární}$$

$a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ ... přidružená homogenní rovnice, řešení se značí $\tilde{y}(x)$

Stačí najít jedno původní (partikulární) rovnice $\hat{y}(x)$, potom řešení původní rovnice se dá zapsat $y(x) = \hat{y}(x) + \tilde{y}(x)$

- můžeme vydělit $\rightarrow$ $y' + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_1(x)}}\cdot y = \underbrace{\frac{f(x)}{a_1(x)}}$ — musí být vždy nenulové

SPOJITÉ NA I

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)$$

HOMOGENNÍ LDR 1. ŘÁDU

$y' + p(x)y = 0$, p spojité na I

$y' = -p(x)y$

a) Stačí řešení $y(x) = 0$, $x \in I$

b) nestačí $y(x)$, $y(x_0) \neq 0$: $y'(x) = -p(x)\cdot y(x)$, $y \neq 0$ na $J \ni x_0$

Separací proměnných $\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$ - má derivaci, je spojitá

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int -p(x)\,dx, \quad \ln|y(x)| = -\int p(x) + \ln|C|$$
$$|y(x)| = e^{-\int p(x)}\cdot e^{\ln|C|} = C\cdot e^{-\int p(x)}$$
$$y(x) = C\cdot e^{-\int p(x)}, \quad C \neq 0$$

+ STACIONÁRNÍ ŘEŠENÍ $\Rightarrow y(x) = C\cdot e^{-\int p(x)}$; $x \in J$; $(C \in \mathbb{R})$

Příklad: $y' + \frac{1}{x}\cdot y = 0$, $\frac{1}{x}$ je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$

$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{1}{x}y$, $\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{1}{x}dx$; $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$

$|y| = \left|\frac{C}{x}\right|$; $y(x) = \frac{C}{x}$ pro $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, \infty)$. Řešení pro $y(1) = 2$; $2 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 2$

$y(x) = \frac{2}{x}$; $x \in (0, +\infty)$

METODA VARIACE KONSTANTY

$\tilde{y}(x) = C\cdot e^{-\int p(x)}$

$\hat{y}(x) = C(x)\cdot e^{-\int p(x)}$

$\left(C(x)\cdot e^{-\int p(x)}\right)' + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)} = q(x)$

$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)} + C(x)\cdot e^{-\int p(x)}\cdot(-p(x)) + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)} = q(x)$

$$C'(x) = q(x)\cdot e^{\int p(x)}$$
$$C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)}$$

OBECNĚ $\hat{y}(x) = \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)}\right)\cdot e^{-\int p(x)}$

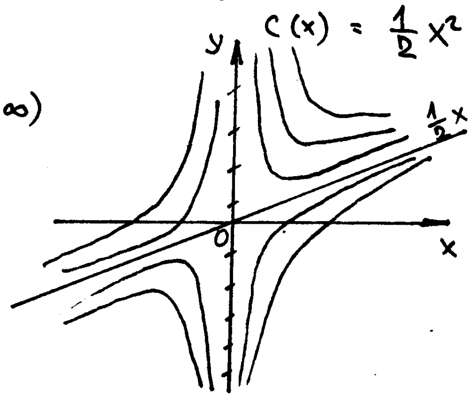
Příklad: $y' + \frac{1}{x} y = 1$

1. Přidružená homogenní rovnice: $y' + \frac{1}{x} y = 0 \ldots \tilde{y}(x) = \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, \infty)$
2. $\hat{y}(x) = \frac{C(x)}{x}$: $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} = 1$, $-\frac{1}{x^2} \cdot C(x) + \frac{1}{x} \cdot C'(x) + \frac{C(x)}{x^2} = 1$, $C'(x) = x$

   $C(x) = \frac{1}{2} x^2$

   $\hat{y}(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2} x$

   OBECNÉ ŘEŠENÍ: $\frac{1}{2} x + \frac{c}{x} = y(x)$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$



3. KONKRÉTNÍ ŘEŠENÍ: $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{c}{1} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

   (ZVOLÍME POČ. PODMÍNKU)

   $y(x) = \frac{1}{2} x + \frac{3}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$

$y' + p(x) y = g(x)$, p, g spojité na I

$y(x_0) = y_0 \quad (x_0 \in I)$

$\Rightarrow$ existuje právě 1 řešení na I

1. $\tilde{y} + y' + p(x) = 0$
2. $\hat{y}(x) \ldots$ variace konstanty, $y(x) = \hat{y}(x) + \tilde{y}(x)$
3. Dosadíme počáteční podmínku

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

řád n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x); \quad a_{n-1}, \ldots, a_0 \text{ spojité na } I$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$ – přidružená homogenní rovnice

Počáteční podmínka:

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= y_{0,0} \\ y'(x_0) &= y_{0,1} \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{0,n-1} \end{aligned}\right\} n \text{ „vazeb"}$$

Věta: Jsou-li $a_{n-1}, \ldots, a_0, f$ spojité fce na I, $x_0 \in I$, pak Cauchyova úloha má právě jedno řešení na intervalu.

$$y(x) \mapsto y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x)$$ – je lineární

Věta: 1) Je-li $\hat{y}$ řešení LDR a $\tilde{y}$ řešení přidružené homogenní, pak $\hat{y} + \tilde{y}$ je řešení dané rovnice.

2) Jsou-li $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ řešení LDR pak $\hat{y}_1 - \hat{y}_2$ je řešení přidružené homogenní dané LDR.

3) Princip superpozice: Jsou-li $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ řešením LDR se stejnou levou stranou pro f_1, f_2 pak $\hat{y}_1 + \hat{y}_2$ je řešení $f_1 + f_2$

Věta: Množina řešení homogenní LDR řádu n je lineární prostor dimenze n.

a)

$y(x_0)$	$y'(x_0)$	$\ldots$	$y^{(n-1)}(x_0)$	
1	0	$\ldots$	0	$\rightarrow y_0(x)$
0	1	$\ldots$	0	$\rightarrow y_1(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0	0		1	$\rightarrow y_{n-1}(x)$

$\left.\right\}$ n řešení (tvoří bázi) – FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM

$\cdot\, y_{0,0}$

$\cdot\, y_{0,1}$

$\cdot\, y_{0,n-1}$

1. $y_{0,0} \quad y_{0,1} \quad y_{0,n-1}$ $= y(x)$ – každé řešení je kombinací těchto n řešení

1. Lineární nezávislost

$$A_0 y_0 + \dots + A_{n-1} \cdot y_{n-1}(x) = 0 \xrightarrow{x = x_0} A_0 = 0$$

– nulová funkce

KONSTANTA

$$A_0 y_0' + \dots + A_{n-1} \cdot y_{n-1}'(x) = 0 \xrightarrow{x=x_0} A_1 = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

WRONSKÉHO DETERMINANT

Věta: nechť $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou řešení LDR řádu n na intervalu I. Tyto funkce jsou lineárně nezávislé, právě tehdy když determinant matice:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{pro každé } x \in I$$

Důkaz: 1. $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé (y_i je lineární kombinací ostatních)

y_i' je lineární kombinací derivací ostatních

i-tý sloupec je ~~...~~ lin. kombinací ostatních $\Rightarrow \det = 0$

2. $\det \neq 0$ v $x_0 \in I$ … singulární matice … soustava s touto maticí má ∞-mnoho řešení pro nulovou pravou stranu; (existuje netriviální řešení).

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x)$$ – je řešení

$$y(x_0) = 0 = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0)$$ … s nulovými počátečními podmínkami $\}$ existuje jediné řešení

to je i $y(x) = 0$

funkce jsou l. závislé.

Příklad: $$y'' - \frac{x^2-2}{x^2-2x} y' + \frac{2x-2}{x^2-2x} \cdot y = 0, \quad x \in (-\infty, 0),\ x \in (0,2),\ x \in (2, \infty)$$

Fundamentální systém $\{x^2, e^x\}$ 1. řeší diff. rovnici

2. ověření lineární nezávislosti: $\begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - 2x \cdot e^x = e^x(x^2 - 2x)$

KDY JE 0? $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE S KONST. KOEFICIENTY

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad a_n \neq 0,\ f \text{ spojitá na } I$$

1. homogenní: $f(x) = 0$

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ (LAMBDA)

Věta: Je-li λ kořen charakteristické rovnice s násobností k, pak řešením DR jsou $e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$

Důkaz: $$a_n (e^{\lambda x})^{(n)} + \dots + a_1 (e^{\lambda x})' + a_0 e^{\lambda x} =$$

$$a_n \lambda^{(n)} \cdot e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \underbrace{(a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0)}_{0} = 0$$

KOMPLEXNÍ KOŘENY: $\alpha + \beta j$, $\alpha - \beta j$, $e^{(\alpha+\beta j)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + j \cdot \sin \beta x)$

$e^{(\alpha - \beta j)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - j \cdot \sin \beta x)$

$\frac{\text{součet}}{2}$ … $e^{\alpha x} \cos \beta x$

$\frac{\text{rozdíl}}{2j}$ … $e^{\alpha x} \sin \beta x$

Je-li $(\alpha + \beta j)$ imag. kořen char. rovnice pak řešení LDR jsou $e^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

Tato řešení tvoří fundamentální systém.

Příklad: $y''' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$, $y''(0) = 7$

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -2 \Rightarrow FS: \{e^x, xe^x, e^{-2x}\}$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 x\cdot e^x + c_3 e^{-2x}$; $x \in R$ …

$y'(x) = c_1 e^x + c_2(e^x + xe^x) + c_3(-2e^{-2x})$

$y''(x) = c_1 e^x + c_2(2e^x + x\cdot e^x) + c_3(4\cdot e^{-2x})$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= c_1 + c_3 \\ -4 &= c_1 + c_2 - 2c_3 \\ 7 &= c_1 + 2c_2 \end{aligned}\right\}$$ řešení soustavy $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$

$$\underline{\underline{y(x) = e^x - xe^x + 2e^{-2x}}}$$

2. Nehomogenní … hledáme 1 partikulární řešení $\hat{y}$

A. variace konstant $\tilde{y}(x) = c_1 \dots + c_2 \dots + c_3 \dots + \dots + c_n y_n(x)$

$\hat{y}(x) = c_1(x)\,y_1(x) + \dots + c_n(x)\,y_n(x)$

$\hat{y}'(x) = c_1(x)\,y_1'(x) + \dots + c_n(x)\,y_n'(x) + \overbrace{c_1'(x)y(x) + \dots + c_n'(x)\,y_n(x)}^{=0}$

$\hat{y}''(x) = c_1(x)\,y_1''(x) + \dots + c_n(x)\,y_n''(x) + \left(c_1'(x)\,y(x) + \dots + c_n'(x)\,y_n'(x)\right)'$

⋮

$\hat{y}^{(n)}(x) = \dots\dots$

Příklad: $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, např. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = 0 \pm 1j$, Fund. systém: $\{e^{0x}\cos 1x, e^{0x}\sin 1x\}$ $\{\cos x, \sin x\}$

$\tilde{y}(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x$

$\hat{y}(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$, $\hat{y}'(x) = -c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x + \overbrace{c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x}^{=0}$

$\hat{y}''(x) = -c_1(x)\cos x - c_2(x)\sin x - c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x$

$\frac{1}{\cos x} = \quad 0 \quad - c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x$

$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$

$-c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$; CRAMER: $D = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$; $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x}$

$D_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$, $c_2'(x) = \frac{D_2}{D} = 1$, $c_1'(x) = \frac{D_1}{D} = -\frac{\sin x}{\cos x}$

$c_1(x) = \ln|\cos x|$, $c_2(x) = x$

Řešení: $y(x) = \underbrace{\ln|\cos x|\cdot\cos x + x\cdot\sin x}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{c_1\cos x + c_2\sin x}_{\tilde{y}(x)}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

B. metoda odhadu pro $f(x) = \underbrace{e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)}_{\text{kvazi polynom}}$

$\alpha + \beta j$ … ? kořen char. rovnice … násobnost k

$\Rightarrow \hat{y}(x) = e^{\alpha x}\left(\hat{P}(x)\cos\beta x + \hat{Q}(x)\sin\beta x\right)$

$\text{st}\,\hat{P},\ \text{st}\,\hat{Q} \le \max\{\text{st}\,P,\ \text{st}\,Q\}$

Příklad: $y'' - 4y = \cos 2x = e^{0x}(1\cdot\cos 2x + 0\cdot\sin 2x) \Rightarrow (0+2j)$ - je tohle číslo kořenem char rovnice ? NENÍ

$y'' - 4y = 0,\ \lambda^2 - 4 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow FS: \{e^{2x}, e^{-2x}\}$

$\tilde{y}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$

$-4 \mid \hat{y}(x) = e^{0x}(A\cdot\cos 2x + B\cdot\sin 2x)$

$0 \mid \hat{y}'(x) = -A\sin 2x\cdot 2 + 2B\cos 2x$

$1 \mid \hat{y}''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

dosazuji se do původní rovnice

$\cos 2x = -8A\cos 2x - 8B\sin 2x$

$\cos 2x: 1 = -8A \ \dots\ A = -\frac{1}{8}$

$\sin 2x: 0 = -8B \qquad B = 0$

$y(x) = \overbrace{-\frac{1}{8}\cdot\cos 2x}^{\hat{y}(x)} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Def.: Laplaceovým obrazem funkce f definované na $\langle 0,\infty)$ je $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$, pokud tento integrál konverguje alespoň 1 p.

$\mathcal{L}: f(t) \mapsto F(p)$ - zobrazení na prostoru funkcí ; $\mathcal{L}\{f\} = F$; $f \mathrel{\hat{=}} F$

Příklad:

$f(t) = e^{t^2},\ t \in \langle 0,\infty)$

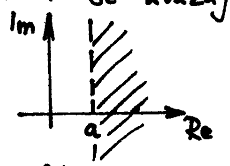
$\int_0^\infty e^{t^2}e^{-pt}\,dt \underset{(p>0)}{\ge} \int_p^\infty e^{t\overbrace{(t-p)}^{\ge 0}}\,dt \ge \int_{p+1}^\infty e^t\,dt = [e^t]_{p+1}^\infty = +\infty$ - NEMÁ LAPLACEŮV OBRAZ

Př.: $a \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{at}$

$\int_0^\infty e^{at}e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-p)t}\,dt = \begin{cases} p>a: & \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p-a} \\ p \le a: & \infty \end{cases}$; $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a},\ p > a$

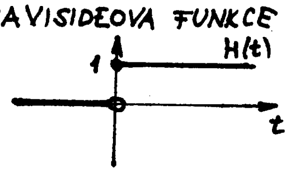
$a = 0: \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p},\ p > 0$

Pozn. 1. F se uvažuje pro komplexní proměnné

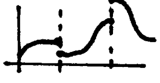


2. $f(t) = 0$ pro $t < 0$; $f(t) = \begin{cases} e^{at}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\Big|\ e^{at}H(t)$

HEAVISIDEOVA FUNKCE



Def: Funkce f definovaná na $\langle 0,\infty)$ se nazývá předmět standardního typu (fce třídy $\mathcal{L}_0$), jestliže platí:



1. f je po částech spojitá
2. f je exponenciálního řádu, pokud existují $M, \alpha \in \mathbb{R}: |f(t)| \le M\cdot e^{\alpha t}$

Př.: $f(t) = e^{t^2}$ $\ |e^{t^2}| \le M\cdot e^{\alpha t} \dots \underbrace{e^{t(t-\alpha)}}_{\to\infty\text{ - nemůže být omezena }M} \le M$

Př.: $f(t) = e^{at}: \ |e^{at}| \le 1\cdot e^{at}$

Věta: Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, pak $\mathcal{L}\{f\}$ je definován na $(\alpha, +\infty)$ a $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$

Důkaz: $|F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\,dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t)\cdot e^{-pt}|\,dt \leq \int_0^\infty M e^{(\alpha-p)\cdot t}\,dt = \frac{M}{p-\alpha}$, $p>\alpha$

Příklad: $f(t) = |\sin t| \leq 1 = 1\cdot e^{0t}$ exp. řádu 0, F def. na $(0,+\infty)$

$$F(p) = \int_0^\infty \sin t\cdot e^{-pt}\,dt = \left|\begin{matrix} u = e^{-pt} & v' = \sin t \\ u' = -p\cdot e^{-pt} & v = -\cos t\end{matrix}\right| = \left[e^{-pt}\cdot\cos t\right]_0^\infty + \int_0^\infty -pe^{-pt}\cdot\cos t\,dt =$$

$$\left|\begin{matrix} u = -pe^{-pt} & v' = \cos t \\ u' = p^2e^{-pt} & v' = \sin t\end{matrix}\right| = \left[-e^{-pt}\cdot(\cos t + p\cdot\sin t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{p^2\cdot e^{-pt}\sin t\,dt}_{\text{STEJNÉ JAKO PŮVODNÍ } \int} = \frac{\left[-e^{-pt}(\cos t + p\sin t)\right]_0^\infty}{p^2+1} =$$

$$= \frac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}\{\sin t\},\ p>0$$

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{p}{p^2+1},\ p>0$$

Věta o linearitě: Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak $\mathcal{L}\{af+bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}$

$(p > \max\{p_f, p_g\})$

Příklad:
$f(t) = e^t$ ... řádu 1, $g(t) = e^{-t}$ ... řádu -1

$$\mathcal{L}\{\cosh t\} = \mathcal{L}\{\tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t}\} = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} = \frac{p}{p^2-1},\ p>1$$

Příklad: $f(t) = e^t$, $g(t) = -e^t$ ... $p>1$

$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{0\} = 0$, $p \in \mathbb{R}$

Věta o derivaci obrazu: Nechť $f \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, $F = \mathcal{L}\{f\}$. Pak $\mathcal{L}\{t\cdot f(t)\} = -F'(p)$, $p>\alpha$

Důkaz: $F(p) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{dp}(f(t)\cdot e^{-pt})\cdot dt = \int_0^\infty -t(f(t))\cdot e^{-pt}\,dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$

$|f(t)| \leq M\cdot e^{\alpha t}$ ... $|t| \leq M_\varepsilon e^{\varepsilon t}$ ... k libovolnému $\varepsilon>0$ ex. M_ε

Př.: $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$, $p>0$

$\mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\{t\cdot 1\} = -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}$, $p>0$ $\quad \mathcal{L}\{p^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$, $p>0$

Věta o integraci obrazu: Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, $\mathcal{L}\{f\} = F$ a $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$ je vlastní, pak $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = -\int F(p) = -\int_\infty^p F(p)\,dp = \int_p^\infty F(p)\,dp$

Příklad: $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_p^\infty \frac{1}{p^2+1}\,dp = [\operatorname{arctg} p]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$

$\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t} = 1$, $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}$

Věta o substituci (posunu) obrazu:
Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, $F = \mathcal{L}\{f\}$, $a \in \mathbb{R}$, pak $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(p-a)$, $p > \alpha + a$

Důkaz: $|e^{at}f(t)| \leq e^{at}\cdot Me^{\alpha t} = Me^{(a+\alpha)t}$; $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-a)t}\,dt = F(p-a)$

Příklad: $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$, $p>0$, $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $p>a$

Věta o změně měřítka:

Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, $F = \mathcal{L}\{f\}$, $a>0$, pak $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$, $p > a\alpha$

Důkaz: $|f(at)| \le M \cdot e^{\alpha(at)\cdot t}$; $\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)\, e^{-pt}\, dt = \left| \begin{matrix} at = u \\ dt = \frac{1}{a} du \end{matrix} \right| = \int_0^\infty f(u) \cdot e^{-\frac{p}{a} u} \cdot \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$

Příklad: $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}$, $p>0$

$a>0$: $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $p>0$

$a<0$: $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \mathcal{L}\{-\sin(\underbrace{-\omega t}_{>0})\} = -\frac{-\omega}{p^2+(-\omega)^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

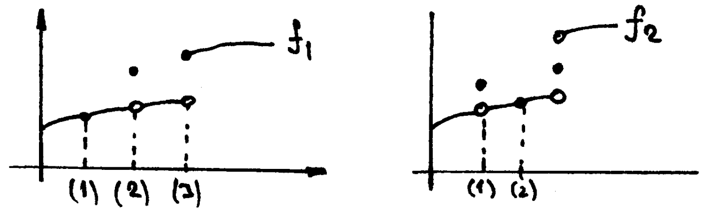
$\omega = 0$: $\mathcal{L}\{\sin 0t\} = \mathcal{L}\{0\}$

$\cos \omega t \triangleq \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $p>0$

$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$ – postup zpátky není jednoznačný, když změníme hodnotu v jednom bodě pak už nebude spojitá

← definuje se limita zprava ⇒ fce je zprava spojitá

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt$$



Věta: Jsou-li $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, $\mathcal{L}\{f_1\} = \mathcal{L}\{f_2\}$ na (α, ∞), pak $f_1(t) = f_2(t)$ na $\langle 0, \infty)$ s výjimkou nejvýše spočetně izolovaných bodů.

Věta: Racionální fce je Laplaceovým obrazem fce z $\mathcal{L}_0$ právě tehdy, když je ryze lomená. Pak je obrazem na intervalu (α, ∞), kde α je největší reálná část kořenů jmenovatele.

Důkaz: $\Rightarrow$ $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0 \ldots F$ je ryze lomená

Ryze lomená funkce lze rozložit na součet parciálních zlomků, linearita

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a} \ldots \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{at}$; $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} \ldots \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bp+C}{(p^2+bp+c)^n}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(p+\frac{1}{2}b) - \frac{b}{2}B + C}{\left[(p+\frac{1}{2}b)^2 \underbrace{- \frac{1}{4}b^2 + c}_{\omega^2}\right]^n}\right\} = e^{-\frac{b}{2}t}\left[B \cdot \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{f_n(t)} + \left(C - \frac{b}{2}B\right) \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{g_n(t)}\right]$$

$f_1(t) = \cos \omega t, \ldots \quad f_{n+1}(t) = \frac{1}{2n} t \cdot g_n(t)$

$g_1(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \ldots \quad g_{n+1}(t) = \frac{1}{2n\omega^2}\left[(2n-1)\, g_n(t) - t\, g_n'(t)\right]$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2n} t\, g_n(t)\right\} = \frac{1}{2n} \cdot (-1) \cdot \frac{d}{dp} \mathcal{L}\{g_n(t)\} = -\frac{1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{(p^2+\omega^2)^n}\right)' = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{(-n) \cdot 2p}{(p^2+\omega^2)^{n+1}} = \frac{p}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$$

Příklad:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^2-1}{p^2+3p}\right\}$ – neexistuje, není ryze lomené $\left(\lim_{p\to\infty} \frac{p^2-1}{p^2+3p} = 1 \neq 0\right)$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-p+7}{p^2+p-2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p-1} - \frac{3}{p+2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} = 2e^{1\cdot t} - 3e^{-2t}$
3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(p-4)^2}\right\} = 3 \cdot e^{4t}\frac{t}{1!} = 3t \cdot e^{4t}$ 4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4p-5}{p^2+4p-13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4(p+2)-13}{((p+2)^2+3^2)}\right\} = e^{-2t}\left(4\cos 3t - \frac{13}{3}\sin 3t\right)$

Řešení diferenciálních rovnic

Věta o obrazu derivace:

Je-li $f' \in \mathcal{L}_0$, exp. řádu α, $F = \mathcal{L}\{f\}$; $f(0+) = \lim\limits_{t \to 0+} f(t) \in \mathbb{R}$, pak $\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0+)$

Důkaz: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-pt}\,dt = \left| \begin{matrix} u = e^{-pt} & v' = f'(t) \\ u' = -pe^{-pt} & v = f(t) \end{matrix} \right| = \left[f(t)\, e^{-pt}\right]_0^\infty + \int_0^\infty p\, f(t) e^{-pt}\,dt =$

$= 0 - f(0+) + p \cdot F(p)$

$$\mathcal{L}\{(f'(t))\} = p \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0+) = p\left(p \cdot F(p) - f(0+)\right) - f'(0+)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0+) - \dots -$$

Příklad: $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t \cdot e^{-t}$, $x(0+) = 1$, $\dot{x}(0+) = -1$

LT$\downarrow$

$$\left(p^2 X(p) - p \cdot 1 - (-1)\right) + 2 \cdot \left(pX(p) - 1\right) + X(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$X(p) \cdot \left(p^2 + 2p + 1\right) = \frac{1}{(p+1)^2} + p + 1$$

$$X(p) = \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{1}{p+1} \xrightarrow{\text{zpětná LT}} x(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} + e^{-t}$$

Příklad: $\dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}$, $x(0+) = 2$

$\dot{y} = 2x - 2y$, $y(0+) = 2$

LT$\downarrow$

$pX(p) - 2 = 2X(p) - 4Y(p) + \frac{4}{p+2}$ $\qquad X(p) = \frac{2p}{p^2+4} \xrightarrow{\text{ZPĚT}} x(t) = 2 \cdot \cos 2t$

$pY(p) - 2 = 2X(p) - 2Y(p)$ $\qquad Y(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{p+2}{p^2+4} \xrightarrow{\text{ZPĚT}} y(t) = e^{-2t} + \cos 2t + \sin 2t$

Věta o obrazu integrálu:

Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, $F = \mathcal{L}\{f\}$, pak $\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^t f(u)\,du}_{g(t),\ g(0+) = 0}\right\} = \frac{F(p)}{p}$

Důkaz:

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = p\,\mathcal{L}\{g(t)\} - \cancelto{0}{g(0+)}$$

Příklad: $\dot{x}(t) + 4x(t) + 13\int_0^t x(u)\,du = 0$, $x(0+) = 1$

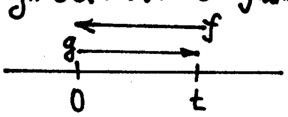
LAPLAC. TRANS. $\downarrow$ $\left(pX(p) + (-1)\right) + 4X(p) + 13\frac{X(p)}{p} = 0$

$$X(p)\left(p + 4 + \frac{13}{p}\right) = 1; \quad X(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 13} = \frac{(p+2) - \frac{2}{3} \cdot 3}{(p+2)^2 + 3^2}; \quad x(t) = e^{-2t}\left(\cos 3t - \frac{2}{3}\sin 3t\right)$$

$t \geq 0$

KONVOLUCE:

Def.: Konvoluce funkcí $f, g \in \mathcal{L}_0$ je funkce $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du$ $(t \geq 0)$



; Vlastnosti:

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$

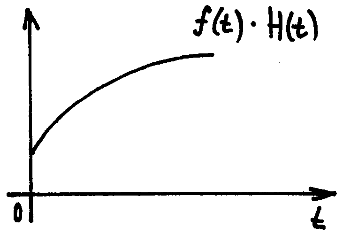
Věta: (obraz konvoluce). Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, $F = \mathcal{L}\{f\}$, $G = \mathcal{L}\{g\}$, pak $\mathcal{L}\{f * g\} = F \cdot G$

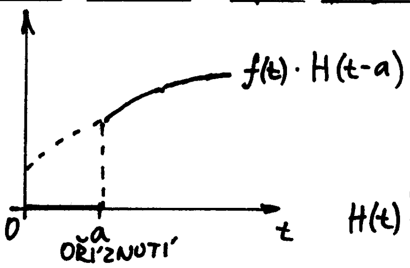
Příklad: $\dot x(t) + x(t) - \underbrace{\int_0^t \sin(t-u)\,x(u)\,du}_{\text{KONVOLUCE } (\sin * x)(t)} = \cos t$; $x(0+) = 0$

L.T. ↓

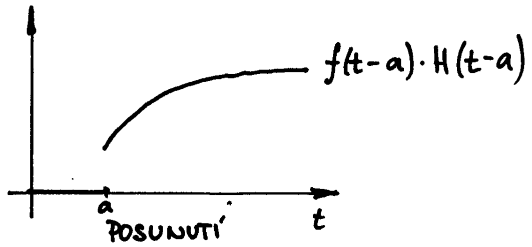
$pX(p) - 0 + X(p) - \frac{1}{p^2+1}\cdot X(p) = \frac{p}{p^2+1}$; $X(p) = \frac{p}{p^3+p^2+p} = \frac{1}{p^2+p+1} = \frac{\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{2}}{(p+\frac12)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}$

$x(t) = \frac{2}{\sqrt3}\cdot e^{-\frac12 t}\sin\frac{\sqrt3}{2}t$





H(t) – Heavisaidova funkce



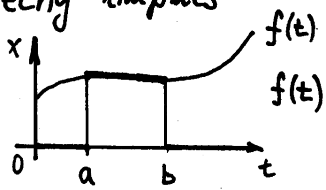
Věta o translaci: Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exp. řádu α, pak $\mathcal{L}\{f(t)\cdot H(t-a)\} = e^{-ap}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\cdot H(t-a)\} = e^{-ap}\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}$, $p > \alpha$

Důkaz: $\mathcal{L}\{f(t-b)\cdot H(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-b)\cdot H(t-a)\,e^{-pt}\,dt = \int_a^\infty f(t-b)\,e^{-pt}\,dt = \left|\begin{matrix} u = t-a \\ du = dt\end{matrix}\right| =$

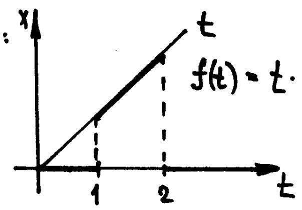
$= \int_0^\infty f(u+a+(-b))\cdot e^{-p(u+a)}\,du = e^{-pa}\int_0^\infty f(u+a-b)\,e^{-pu}\,du = e^{-pa}\mathcal{L}\{f(t+a-b)\}$

Konečný impuls



$f(t)\cdot[H(t-a) - H(t-b)]$

Příklad:

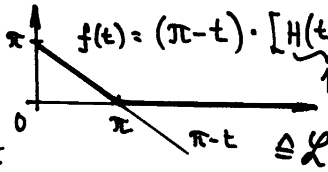


VĚTA O TRANSLACI

$f(t) = t\cdot[H(t-a) - H(t-2)] = t\,H(t-a) - t\,H(t-2) \triangleq e^{-p}\mathcal{L}\{(t+1)\} - e^{-2p}\mathcal{L}\{(t+2)\}$

$= e^{-p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right) - e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}\right)$, $p \in \mathbb{R}$

Příklad: $\ddot x + x = f(t)$, $x(0+) = \pi$, $\dot x(0+) = 0$



$f(t) = (\pi - t)\cdot[\underbrace{H(t-0)}_{1} - H(t-\pi)] = (\pi - t)H(t) - (\pi - t)H(t-\pi) \triangleq$

$\triangleq \mathcal{L}\{\pi - t\} - e^{-\pi p}\mathcal{L}\{\pi - (t+\pi)\} =$

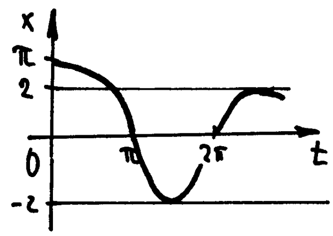
$= \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p^2} - e^{-\pi p}\cdot\frac{1}{p^2}$

L.T. ↓

$p^2X(p) - p\cdot\pi - 0 + X(p) = \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p^2} + e^{-\pi p}\frac{1}{p^2}$

$X(p)\cdot(p^2+1) = \pi p + \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p^2} + e^{-\pi p}\frac{1}{p^2}$

$X(p) = \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+1} + e^{-\pi p}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}\right)$; $x(t) = (\pi - t + \sin t)\cdot e^{0p} + H(t-\pi)\cdot(t - \pi - \sin(t-\pi))$



$x(t) = (\pi - t + \sin t) + H(t-\pi)(t - \pi + \sin t) = \begin{cases} \pi - t + \sin t, & t \in \langle 0, \pi) \\ 2\sin t, & t \in (\pi, \infty) \end{cases}$

Věta o obrazu periodické funkce:

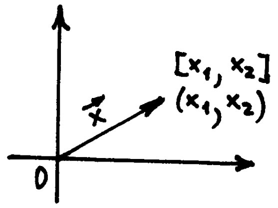
Je-li f periodická s periodou T $(f(t+T)=f(t))$, pak $\mathcal{L}\{f\} = \dfrac{\int_0^T f(t)e^{-pt}\,dt}{1-e^{-Tp}}$

Důkaz:
$$\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,e^{-pt}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t-nT)\,e^{-pt}\,dt = \left|\begin{matrix} t-nT=u \\ dt=du\end{matrix}\right| =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T f(u)\,e^{-p(u+nT)}\,du = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT}\underbrace{\int_0^T f(u)\cdot e^{-pu}\,du}_{F_T} = F_T(p)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-pT}\right)^n}_{\text{GEOMETRICKÁ ŘADA}} =$$
$$= F_T(p)\cdot\frac{1}{1-e^{-pT}}\ ,\quad p>0$$

DIF. POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNÝCH

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$; $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$; $\vec{x}+\vec{y}$, $a\cdot\vec{x}$, $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1+\dots+x_ny_n$

kartézská soustava souřadnic, ORTONORMÁLNÍ BÁZE: $\vec{e}_1=(1,0,\dots,0)$;



$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$ $\vec{e}_2=(0,1,\dots,0)$;

nulový vektor: $\vec{o}=(0,0,\dots,0)$. $\vdots$

norma – velikost vektoru $\vec{e}_n=(0,0,\dots,1)$;

Vlastnosti euklidovské normy:
1. $\|\vec{x}\|\geq 0$; $\|\vec{x}\|=0$ pouze pro $\vec{x}=\vec{o}$
2. $\|a\vec{x}\| = |a|\cdot\|\vec{x}\|$
3. $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Pozn. SUPREMOVÁ NORMA $\|\vec{x}\|_M = \max\{|x_i|;\ i=1,\dots,n\}$

SOUČTOVÁ NORMA $\|\vec{x}\|_S = |x_1|+\dots+|x_n|$

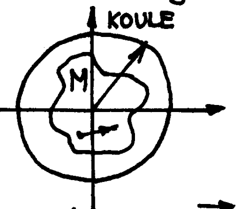
$\|\vec{x}\|_M \leq \|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|_S \leq n\,\|\vec{x}\|_M$

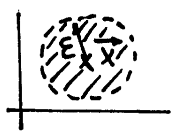
SCHWARZOVA NEROVNOST $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\leq\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$

$M\subset\mathbb{R}^n$ je omezená: ex. $K\in\mathbb{R}$ tak, že $\|\vec{x}\|\leq K$ pro každé $\vec{x}\in M$

Průměr množiny M: $\operatorname{diam}(M) = \sup\{\|\vec{x}-\vec{y}\|;\ \vec{x},\vec{y}\in M\}$, omezená … $\operatorname{diam}(M)<\infty$

(omezené všechny souřadnice)



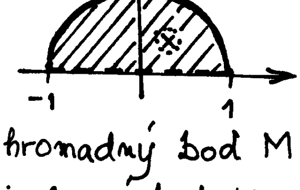


Prstencové ε-okolí:
$P(\vec{x},\varepsilon) = U(\vec{x},\varepsilon)\setminus\{\vec{x}\}$

ε-okolí bodu $\vec{x}$ … $U(\vec{x},\varepsilon) = \{\vec{y}\in\mathbb{R}^n;\ \|\vec{y}-\vec{x}\|<\varepsilon\}$

(POLOMĚR $\vec{y}$)

Příklad:



$x\in\mathbb{R}^n$: vnitřní bod M … ex. $U(\vec{x},\varepsilon)\subset M$ → vnitřek

hraniční bod M … pro každé $U(\vec{x},\varepsilon)$ je $U(\vec{x},\varepsilon)\cap M$, $U(\vec{x},\varepsilon)\cap(\mathbb{R}^n\setminus M)\neq\emptyset$

vnější bod M … ex. $U(\vec{x},\varepsilon)$ disjunktní s M

vnitřek ∪ hranice = uzávěr množiny

hromadný bod M … v každém okolí leží bod z M
(prstenc.)

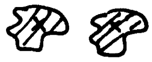
izolovaný bod M … ex. prstencové okolí disjunktní s M.

M je otevřená … rovná se svému vnitřku (Sjednocení nek. mnoha otevřených množin je otevřená)

M je uzavřená … rovná se svému uzávěru. Průnik (i konečně mnoha) množin otevřených je otevřená)

M je otevřená … její doplněk je uzavřený

SOUVISLÉ MNOŽINY – z jednoho bodu do jiného se lze dostat 

NESOUVISLÉ MNOŽINY – 

M není souvislá: existují otevřené množiny O_1, O_2; (1) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, (2) $O_1 \cup O_2 \supset M$
(3) $O_1 \cap M$, $O_2 \cap M \neq \emptyset$

Otevřená množina je souvislá právě tehdy když každé dva její body lze spojit lomenou čarou.

OBLAST – množina, která je otevřená a souvislá.

POSLOUPNOSTI V $\mathbb{R}^n$

Def.: Posloupnost v $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

$$1 \mapsto \vec{x_1},\ 2 \mapsto \vec{x_2},\ \dots \qquad (\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$$

Př.: $\vec{x_k} = \left(\frac{1}{k}; \frac{3k+1}{2k-1}; 1-2^{-k}\right)$ – posloupnost 3 rozměrných ar. vektorů

Def.: Posloupnost $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ má limitu $\vec{x}$, pokud pro každé okolí U vektoru $\vec{x}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\vec{x_k} \in U$ pro každé $k > k_0$

Věta: $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x_k} = \vec{x}$ právě tehdy, když $\lim \vec{x_{k,i}} = \vec{x_i}$ pro <u>všechna</u> $i = 1, \dots, n$

Př.: $\vec{x_k} = \left(\frac{1}{k}; \frac{3k+1}{2k-1}; 1-2^{-k}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$

Důkaz:

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_{k,i} - x_i| \le \|\vec{x_k} - \vec{x}\| \le \sqrt{n} \cdot \max_{i=1,\dots,n} |x_{k,i} - x_i|$$

$$\downarrow \quad \Leftarrow \quad \downarrow \quad \Leftarrow \quad \downarrow$$

$$0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0$$

Př.: $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\underbrace{(-1)^k}_{\text{nemá limitu}}; \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{0}\right) = \text{neex}$

Definice: Reálná funkce n reálných proměnných je zobrazení $\mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$ je definiční obor f.

Ozn. $f(\vec{x}) = f((x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$, místo $(x_1, x_2) \dots (x, y)$, $(x_1, x_2, x_3) \dots (x, y, z)$

Příklad: DEFINIČNÍ OBOR, OBOR HODNOT

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}(f) = f(\mathcal{D}(f))$, $\mathcal{R}(f) = \langle 0; \infty)$

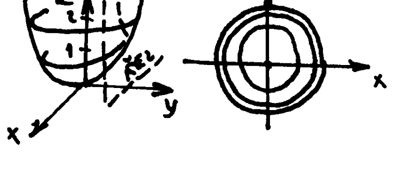
2. $f(x,y,z) = \ln(\underbrace{1 - x^2 - y^2 - z^2}_{0})$, $\mathcal{D}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ (KOULE O POLOMĚRU 1)
$\mathcal{R}(f) = (-\infty, 0\rangle$

3. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\underbrace{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}_{\ge 0}}$ $\mathcal{D}(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \ge 0\}$

Def.: Graf fce f: $\text{Graf}(f) = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^n : y = f(\vec{x})\}$

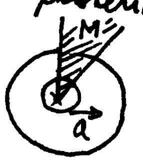
Hladina konstantnosti $f^{-1}(c)$

Řez grafu: graf$(f) \cap$ „rovina“ s poslední „osou“

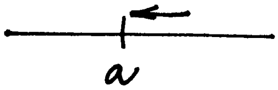


Def.: nechť $M \subset D(f)$, $\vec{a}$ je hromadný bod M; $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{a} \\ \vec{x}\in M}} f(\vec{x}) = b$: ← vynecháme pro $M = D(f)$

Pro každé okolí U čísla b existuje prstencové okolí $P(\vec{a})$, tak, že obraz $f(P \cap M) \subset U$



Příklad:

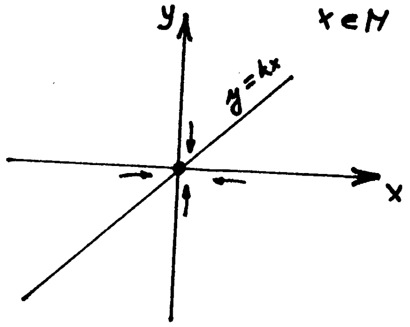


$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\in(a,+\infty)}} f(x)$$

Věta: $\lim\limits_{x\to\vec{a}} f(\vec{x}) = b$ právě tehdy, když $\lim\limits_{\substack{x\to\vec{a} \\ x\in M}} f(\vec{x}) = b$ pro každé $M \subset D(f)$

Příklad:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$



$y=0: \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

$x=0: \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

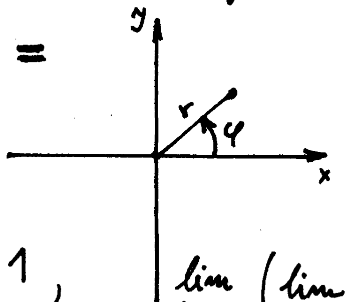
$y=x\cdot k: \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k^2}{1+k^4} = \dfrac{k^2}{1+k^4} \neq 0$ CELKOVÁ LIMITA NEEXISTUJE

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$; $y = kx: \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^{\circ}}{x^2+k^2} = 0$, $x=0: \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$

Po všech přímkách je limita rovna nule.

$y=x^2: \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ ← vyšla jiná limita ⇒ NEEXISTUJE

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} =$



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi = 0$

$\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ $|r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi| \leq 1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right) = 1$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right) = 0$

Def.: Funkce f je spojitá v $\vec{a}$, pokud $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$

Věta: VĚTY o limitách a spoj. funkcí platí i pro více proměnných.

Příklad spoj. fcí: polynomy více proměnných $6xyz^2 - x^3y^5 + 2z^4$

Př.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pokud jsou spojité, tak i $(g\circ f)$ je spojitá

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $G: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ spojité, pak i $G\circ F$ je spojité

Vektorová funkce - obor hodnot jsou vektory $F(x_1,\dots,x_n) = (\underbrace{F_1(x_1,\dots,x_n)}_{\to\mathbb{R}},\dots, F_n(x_1,\dots,x_n))$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} F(\vec{x}) = \left(\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F_1}(\vec{x}),\dots, \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F_n}(\vec{x})\right)$$

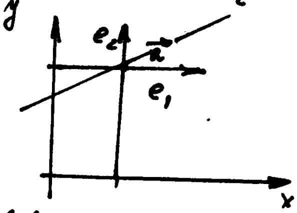
DERIVACE

$f(x,y) = e^x + x^2 y$, $\quad \vec a = (1,2)$, $\quad (f(x,2))' = (e^x + 2x^2)' = e^x + 4x \overset{x=1}{=} e + 4 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$

$(f(1,y))' = (e + \cancel{2x}y)' = 1 \quad = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

Def: Parciální derivace fce podle x_i v bodě $\vec a$ je definována $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec a) = \varphi'(a_i)$, kde

$\varphi(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$



$$\varphi'(a_i) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a_i+t) - \varphi(a_i)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots, a_i+t, \dots, a_n) - f(\vec a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec a + t\cdot \vec e_i) - f(\vec a)}{t}$$

Def.: Derivace funkce f ve směru $\vec h$ v bodě $\vec a$ je

$$f'_{\vec h}(\vec a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec a + t\vec h) - f(\vec a)}{t}$$

Př.: $f(x,y) = e^x + x^2 y$, $\vec a = (1,2)$, $\vec h = (-1,3)$

$$f'_{(-1,3)}(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,2)+t(-1,3)) - f(1,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1-t, 2+3t) - f(1,2)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(e^{1-t} + (1-t)^2\cdot(2+3t) - e^1 - 2\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(e^{1-t} + \underbrace{3t^3 - 4t^2 - t}_{3t^2-4t-1 \,\to\, -1} - e\right) = -e - 1$$

1. $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f'_{\vec e_1}$
2. někdy pro $\|\vec h\| = 1$
3. $f'_{\vec 0}(\vec a) = 0$
4. $f'_{c\vec h}(\vec a) = c \cdot f'_{\vec h}(\vec a)$
5. $\varphi(t) = f(\vec a + t\vec h) \dots \varphi'(0) = f'_{\vec h}(\vec a)$

Věta: nechť $\vec a, \vec h \in \mathbb{R}^n$ a ex. $f'_{\vec h}(\vec a)$, $g'_{\vec h}(\vec a)$. Pak $(f \pm g)'_{\vec h}(\vec a) = f'_{\vec h}(\vec a) + g'_{\vec h}(\vec a)$

$(fg)'_{\vec h}(\vec a) = f'_{\vec h}(\vec a)\cdot g(\vec a) + f(\vec a)\cdot g'_{\vec h}(\vec a)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{\vec h}(\vec a) = \frac{f'_{\vec h}(\vec a)\, g(\vec a) - f(\vec a)\cdot g'_{\vec h}(\vec a)}{[g(\vec a)]^2}$$

Def.: GRADIENT fce f v bodě $\vec a$ je $\operatorname{grad} f(\vec a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec a)\right)$

grad f : $\vec a \in \mathcal{D}(f) \mapsto$ vektor z $\mathbb{R}^n$ ... vektorová funkce

$\operatorname{grad} f(\vec a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\vec a$; $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f$

$\operatorname{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ $(= \nabla \dots$ nabla$)$

Př.: $f(x,y)=e^x+x^2y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^x+2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2$, $\operatorname{grad}(x,y)=(e^x+2xy, x^2)$

$\operatorname{grad} f(1,2)=(e+4;1)$

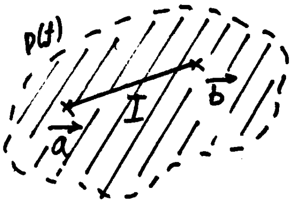
Věta: Nechť $\vec a$ je vnitřní bod $\mathcal{D}(f)$, parciální derivace f existují v okolí bodu $\vec a$ a jsou spojité v $\vec a$.

Pak $f'_{\vec h}(\vec a)=\operatorname{grad} f(\vec a)\cdot\vec h$ SKALÁRNÍ SOUČIN

Př.: $f(x,y)=e^x+x^2y$, $f'_{(-1,3)}(1,2)=\operatorname{grad} f(1,2)\cdot(-1,+3)=(e+4,1)\cdot(-1,3)=-e-4+3=-e-1$

Př.: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad f(0,y)=f(x,0)=0$, $\operatorname{grad} f(0,0)=(0,0)$

$f'_{(1,1)}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac12-0}{t}$ NEEXISTUJE



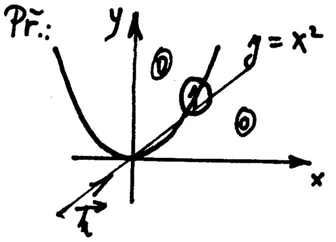
$\varphi(t)=f(\vec a+t(\vec b-\vec a))$ pro $t\in\langle0,1\rangle$ se proběhne I

ex. $\alpha\in(0,1)$: $\varphi'(\alpha)=\varphi(1)-\varphi(0)$

$f'_{\vec b-\vec a}(\vec a+\alpha(\vec b-\vec a))=f(\vec b)-f(\vec a)$

Věta: Nechť $I\subset\mathcal{D}(f)$ je úsečka spojující $\vec a,\vec b$, f je spojitá na I, $f'_{\vec b-\vec a}$ ex. vlastní na I. Pak existuje $\alpha\in(0,1)$ tak, že $f(\vec b)-f(\vec a)=$
$=f'_{\vec b-\vec a}(\vec a+\alpha(\vec b-\vec a))$

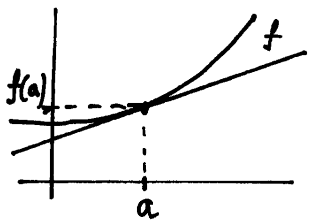
Př.:



– na parabole má hodnotu 1, jinde 0.

$f'_{\vec h}(0,0)=0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje



$f(a+h)-f(a)=k\cdot h+\overset{\text{CHYBA}}{\omega(h)}$

$\frac{\omega(h)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)-kh}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-k\xrightarrow{h\to0}f'(a)-k$

nejlépe pro $k=f'(a)$, pak $\frac{f(a+h)-f(a)-kh}{h}\to0$

derivace: $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)\cdot h}{h}=0$

Definice: TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL f v $\vec a$ (vnitřní bod $\mathcal{D}(f)$) je lineární zobrazení $df(\vec a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ pro které platí $\lim_{\vec h\to\vec o}\frac{f(\vec a+\vec h)-f(\vec a)-df(\vec a)(\vec h)}{\|\vec h\|}=0$

$df(\vec a)(\vec h)$, $df(\vec a,\vec h)$

$L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(h_1,\dots,h_n)\mapsto k_1h_1+\dots+k_nh_n$

Př.: $f(x,y)=x^2+y^2$, $df(1,1)\cdot(h_1,h_2)=2h_1+2h_2$

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{o}}\frac{f((1,1)+(h_1,h_2))-f(1,1)-(2h_1+2h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{(1+2h_1+h_1^2+1+2h_1+h_2^2)-2-(2h_1+2h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\sqrt{h_1^2+h_2^2}=0$$

1. $n=1$: $df(\vec{a})\cong f'(a)$; n: $df(\vec{a})\cong(h_1,\dots,h_n)$
2. f lineární: $df(\vec{a})=f$
3. pro vektorovou funkci $\displaystyle\lim_{\vec{h}\to\vec{o}}\frac{\|F(\vec{a}+\vec{h})-F(\vec{a})-dF(\vec{a})(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}$

Věta: má-li f v bodě $\vec{a}$ diferenciál, pak má v $\vec{a}$ všechny směrové derivace a platí $f'_{\vec{h}}(\vec{a})\overset{1)}{=}df(\vec{a})(\vec{h})\overset{2)}{=}\operatorname{grad} f(\vec{a})\cdot\vec{h}$

Důkaz: 1. $\vec{h}=\vec{o}$: $f'_{\vec{o}}(\vec{a})=0=df(\vec{a})(\vec{o})$

$\vec{h}\neq\vec{o}$: $f'_{\vec{h}}(\vec{a})-df(\vec{a})(\vec{h})=\displaystyle\lim_{\substack{t\to0\\ \updownarrow\\ t\cdot\vec{h}\to\vec{o}}}\frac{f(\vec{a}+t\vec{h})-f(\vec{a})-t\,df(\vec{a})(\vec{h})}{\pm\|t\cdot\vec{h}\|}\cdot\|\vec{h}\|=0$

2. $df(\vec{a})(\vec{h})=df(\vec{a})\cdot(h_1\vec{e_1}+\dots+h_n\vec{e_n})=h_1\,df(\vec{a})(\vec{e_1})+\dots+h_n\,df(\vec{a})\vec{e_n}=$

$\overset{1)}{=}h_1 f'_{\vec{e_1}}(\vec{a})+\dots+h_n\cdot f'_{\vec{e_n}}(\vec{a})=h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})+\dots+h_n\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})=$

$=(h_1,\dots,h_n)\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}),\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right)=\vec{h}\cdot\operatorname{grad} f(\vec{a})$

$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ lineární, existuje matice $\mathbb{A}$: $A(\vec{x})^T=\mathbb{A}\cdot\vec{x}^T$, $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}=\mathbb{A}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$df(\vec{a}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lineární

$$df(\vec{a})(\vec{h})=\operatorname{grad} f(\vec{a})\underset{\text{SKALÁRNÍ}}{\cdot}\vec{h}=\overbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right)}^{\text{grad je matice } df}\underset{\text{MATICOVÝ}}{\cdot}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

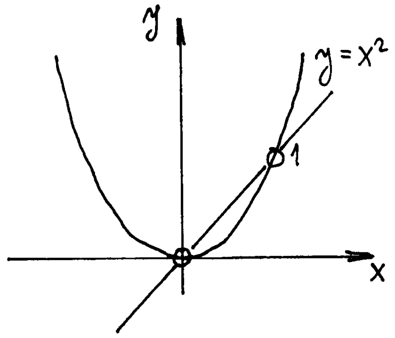
$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, $F=(F_1,\dots,F_k)$ Jakobiho matice F v $\vec{a}$

$$dF(\vec{a})(\vec{h})^T=\begin{pmatrix}dF_1(a)\\ \vdots\\ dF_k(\vec{a})\end{pmatrix}(\vec{h})=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(\vec{a})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

Př.: $F(x,y)=(\underbrace{x^2+xy}_{F_1(x,y)},\ \underbrace{2x+5y}_{F_2(x,y)})$

$dF(x,y)\longleftrightarrow\begin{pmatrix}2x+y & x\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; $dF(1,1)(h_1,h_2)^T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3h_1+h_2\\ 2h_1+5h_2\end{pmatrix}$

$dF(1,1)(h_1,h_2)=(3h_1+h_2,\ 2h_1+5h_2)$



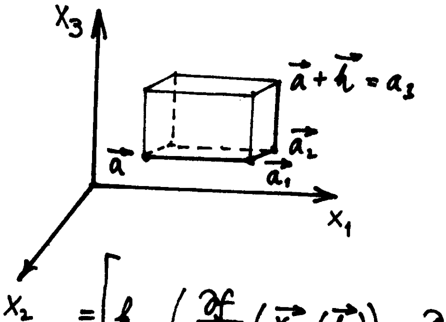
Věta: Má-li funkce v některém bodě diferenciál, pak je v něm spojitá.

Důkaz: $\left[f(\vec a+\vec h)-f(\vec a)\right]=D$

$$\lim_{\vec h\to\vec o} D=\lim_{\vec h\to\vec o}\Bigg[\underbrace{\frac{f(\vec a+\vec h)-f(\vec a)-d f(\vec a)(\vec h)}{\|\vec h\|}}_{\to 0}\cdot\underset{0}{\|\vec h\|}+\underbrace{df(\vec a)(\vec h)}_{\to 0}\Bigg]$$

$(df(\vec a)(\vec o)=0)$

Věta: Je-li $\vec a$ vnitřní bod $\mathcal{D}(f)$ a jsou-li všechny parciální derivace f spojité v $\vec a$ (tj. gradient je spojitý v $\vec a$), pak $df(\vec a)$ existuje.



$$f(\vec a+\vec h)-f(\vec a)-\operatorname{grad} f(\vec a)\cdot\vec h=$$
$$=\left[f(\vec a_n)-f(\vec a_{n-1})\right]+\dots+\left[f(\vec a_1)-f(\vec a)\right]-\operatorname{grad} f(\vec a)\cdot\vec h$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec x_n(\vec h))\cdot h_n+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec x_1(\vec h))h_1-\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec a)\cdot h_n-\dots-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec a)h_1=$$
$$=\left[\frac{h_n}{\|\vec h\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec x_n(\vec h))-\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec a)\right)+\dots+\frac{h_1}{\|\vec h\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec x_1(\vec h))-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec a)\right)\right]\|\vec h\|$$

spoj. parc. der. v $\vec a$ $\Rightarrow$ ex. tot. dif. v $\vec a$ $\Rightarrow$ ex. směrových derivací v $\vec a$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ex. parciálních derivací v $\vec a$

Příklad: $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$df(0,0)(h_1,h_2)=0$

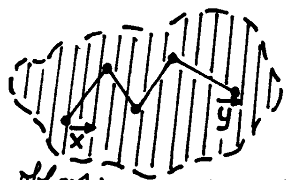
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-0}{\|h_1,h_2\|}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}^{\cancel{2}}\cdot\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}-0}{\cancel{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$\left.\begin{matrix}y=0\\x\to0\end{matrix}\right\}:\ \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{-2}{x}$ nemá limitu

Věta: Má-li funkce nulové parciální derivace na oblasti, pak je na ní konstantní.

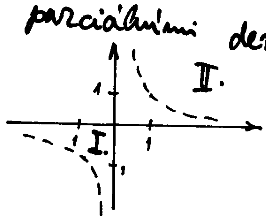
$\mathcal{D}$: $f(\vec y)-f(\vec x)$ (bez újmy na obecnosti krajní body úsečků)
$=f'_{\vec y-\vec x}(\vec z)=\operatorname{grad} f(\vec z)\cdot(\vec y-\vec x)=\vec o(\vec y-\vec x)=0$



Důsledek: Funkce se stejnými parciálními derivacemi na oblasti se liší konstantou.

Př.: $f(x,y)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y$

$g(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

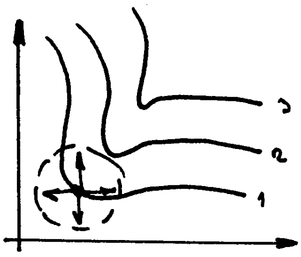


$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\dfrac{1}{x^2+1},\dfrac{1}{y^2+1}\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

I: $(x,y)=0$: $f(x,y)=g(x,y)+c$
$0=0+c$
$f(x,y)=g(x,y)$ pro $xy<1$

II. $y=1$, $x\to y$, $f(x,y)=g(x,y)+\pi$
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{1-x}+c=-\frac{\pi}{4}+c$, $c=\pi$



$\|\vec{h}\| = 1$

$$f'_{\vec h}(\vec a) = \text{grad } f(\vec a)\cdot \vec h = \|\text{grad } f(\vec a)\|\cdot\|\vec h\|\cdot \underbrace{\cos\measuredangle(\text{grad } f(\vec a), \vec h)}_{\langle -1,1\rangle}$$

max. pro $\measuredangle = 0$, max růst ve směru grad $f(\vec a)$

x, y: tečna: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

prostor:
$$y = f(\vec a) + \text{grad } f(\vec a)(\vec x - \vec a)$$

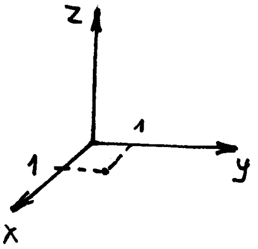
$$y = f(\vec a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec a)\right)(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

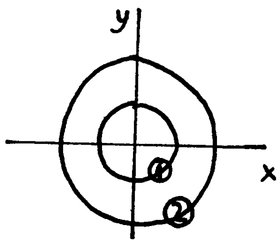
$$y = f(\vec a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec a)(x_n - a_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec a)a_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec a)a_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec a)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec a)\cdot x_n$$

Příklad: $f(x;y) = \sqrt{2x^2 + 2y}$

konst. $= (\text{grad } f(\vec a) - 1)(\vec x, y)$





$$\text{grad } f(x,y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2y}}, \frac{2y}{\sqrt{2x^2+2y}}\right)$$

$\text{grad } f(1,1) = (1,1)$

$f(1,1) = 2$

tečná rovina: normálový vektor $(1,1,-1)$, $x + y - z = 0$

LINEÁRNÍ APROXIMACE FCE

$$f(\vec a + \vec h) \approx f(\vec a) + df(\vec a)\vec h = f(\vec a) + \text{grad } f(\vec a)\cdot \vec h$$

Příklad: $f(x,y) = \text{arctg}\,\frac{x+y}{1-xy}$, $\text{grad}(x,y) = \left(\frac{1}{1+x^2}; \frac{1}{1+y^2}\right)$ v okolí $(0,0)$ $\text{grad}(0,0) = (1,1)$

$f(x,y) \approx f(0,0) + (1,1)\cdot(x+y) = x + y$

$$\vec x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec x);\quad \vec x \mapsto \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(\vec x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Příklad: $f(x,y) = e^{xy^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy^2}\cdot y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{xy^2}\cdot 2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{xy^2}y^4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{xy^2}4x^2y^2 + 2xe^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy^2}\cdot 2xy^3 + e^{xy^2}2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy^2}\cdot 2xy^3 + e^{xy^2}\cdot 2y$$

Příklad: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2};\ (x,y) \neq (0,0) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x,0) - f(0,0)) = 0,\ (x,y) = (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2},\ (x,y) \neq (0,0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(f(0,y) - f(0,0)) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(-y-0) = -1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(x-0) = 1$$

Věta: Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ spojitá na otevřené množině G, pak na G existuje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Věta: Pokud $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existují v okolí $\vec{a}$ a pokud jsou obě tyto parciální derivace spojité v $\vec{a}$ pak jsou stejné v $\vec{a}$.

Definice: $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $k \in \mathbb{N}$. Funkce f třídy C^k na G ($f \in C^k(G)$), pokud má f na G spojité všechny parciální derivace až do řádu k.

$C^1 \supset C^2 \supset C^3 \supset \ldots \supset C^\infty \leftarrow$ parciální derivace všech řádů jsou spojité

$C^0 \ldots$ spojité fce

$$df(\vec{a})\cdot(\vec{h}) = \operatorname{grad} f(\vec{a}) \cdot \vec{h}$$

$$d \to \vec{h} \cdot \operatorname{grad} = (h_1, \ldots, h_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$d^2 \to \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left(h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i \cdot h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})$$

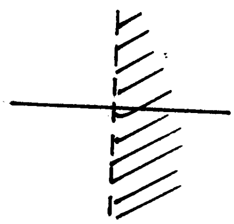
$$d^3 \to \sum_{i,j,k=1}^{n} h_i \cdot h_j \cdot h_k \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

Pozn.: 1. $n = 1$ $\quad d^k = f^{(k)}(a)\, h^k$

3. $$d^2 f(\vec{a})(\vec{h}) = (h_1, \ldots, h_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

HESSOVA MATICE

Př.: $f(x,y) = e^{y \ln x}$ $\quad D(f) = (0, \infty) \times \mathbb{R}$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y \cdot \ln x} \cdot \frac{y}{x}\, ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{y \cdot \ln x} \cdot \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{y \ln x}\, \frac{y^2}{x^2} + e^{y \ln x} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

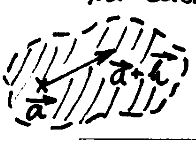
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{y \ln x} \cdot \ln^2 x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} \cdot \ln x + e^{y \ln x}\, \frac{1}{x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$d^2 f(1,2)(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_1 h_2 + 0 h_2^2$$

TAYLORŮV POLYNOM $h + a = x$, $h = x - a$

$$f(a+h) = f(a) + f(a)h + \frac{1}{2} f''(a) h^2 + \ldots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a + \alpha h)\, h^{k+1} \qquad \alpha \in (0,1)$$

Věta: Nechť f je třídy C^{k+1} na otevřené množině G obsahující úsečku s krajními body $\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{h}$. Pak existuje $\alpha \in (0,1)$



$$f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + df(\vec{a})(\vec{h}) + \frac{1}{2} d^2 f(\vec{a})(\vec{h}) + \ldots + \frac{1}{k!} d^k f(\vec{a})(\vec{h}) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\vec{a} + \alpha \vec{h}) \cdot (\vec{h})$$

Příklad: odhadnou $1{,}05^{3{,}02}$ $f(x,y) = x^y$, $\vec{a} = (1,3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^y \cdot \frac{y}{x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \cdot \ln x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)\cdot x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y \cdot \ln^2 x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,3) = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,3) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \vec{h} = (x,y) - (1,3) = (x-1, y-3)$$

$$x^y \approx 1^3 + \left[3(x-1) + 0\cdot(y-3)\right] + \frac{1}{2}\left[6(x-1)^2 + 2(x-1)(y-3) + 0(y-3)^2\right] = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (y-3)(x-1)$$

$$1{,}05^{3{,}02} \approx 1 + 3\cdot 0{,}05 + 3\cdot 0{,}05^2 + 0{,}05\cdot 0{,}02 = 1{,}1585$$

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad g\circ F$$

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny $F: G \to H$, $g: H \to \mathbb{R}$, F má diferenciál v bodě $\vec{a}$, g má diferenciál v bodě $f(\vec{a})$. Pak $g\circ F$ má diferenciál v $\vec{a}$. Diferenciál $d(g\circ F)(\vec{a}) = dg(f(\vec{a})) \circ dF(\vec{a})$

matice:

$$\operatorname{grad} g(f(\vec{a})) \cdot JM(F), \quad \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(\vec{a})); \dots; \frac{\partial g}{\partial y_n}(f(\vec{a}))\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Př.: $f(x,y) = g(e^{xy}, e^{-xy})$

$$\underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{F} \underset{(e^{xy}, e^{-xy}) = (u,v)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{g} \underset{g(u,v)}{\mathbb{R}}$$

$$\operatorname{grad} \underset{(u,v)}{g} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v), \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \cdot \begin{pmatrix} e^{xy}\cdot y & e^{xy}\cdot x \\ e^{-xy}\cdot(-y) & e^{-xy}(-x) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(y e^{xy} \frac{\partial g}{\partial u}(e^{xy}, e^{-xy}) - y\cdot e^{-xy}\frac{\partial g}{\partial v}(e^{xy}, e^{-xy}),\ x\cdot e^{xy}\frac{\partial g}{\partial u}(e^{xy}, e^{-xy}) - x\cdot e^{-xy}\frac{\partial g}{\partial v}(e^{xy}, e^{-xy})\right) = \operatorname{grad} f(x,y)$$

$$\operatorname{grad} f(1,0) = \left(0, \frac{\partial g}{\partial u}(1,1) - \frac{\partial g}{\partial v}(1,1)\right)$$

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny, $F: G \to H$ má v $\vec{a}$ derivaci ve směru $\vec{h}$. $g: H \to \mathbb{R}$ má $f(\vec{a})$ diferenciál. Pak $(g\circ F)'_{\vec{h}}(\vec{a}) = dg(f(\vec{a}))\cdot(F'_{\vec{h}}(\vec{a}))$

Důkaz: (pro F s dif) … $(g\circ F)'_{\vec{h}}(\vec{a}) = d(g\circ F)(\vec{a})(\vec{h}) = [dg(f(\vec{a}))\circ dF(\vec{a})](\vec{h}) =$

$$= dg(f(\vec{a}))\left[dF(\vec{a})(\vec{h})\right] = dg(f(\vec{a}))(F'_{\vec{h}}(\vec{a}))$$

$$\frac{\partial(g\circ F)}{\partial x_i} = dg(F(\vec{a}))\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{a})\right) = \operatorname{grad} g(F(\vec{a}))\cdot\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\vec{a})\right) = \frac{\partial g}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

zjednodušeně: $$\frac{\partial(g\circ F)}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

Př.: $f(x,y) = g(\underbrace{e^{xy}}_{u}, \underbrace{e^{-xy}}_{v})$ $\quad F: (x,y) \mapsto (e^{xy}, e^{-xy})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot e^{xy}\cdot y + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot e^{-xy}(-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot e^{xy}\cdot x + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot e^{-xy}(-x)$$

Př.: $f(x,y,z) = x\cdot g(\overset{u}{\frac{y}{x}}, \overset{v}{\frac{z}{x}})$ $\quad (x \neq 0)$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{-y}{x^2} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{-z}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) = x\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot 0\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right) = x\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \left(x\cdot g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)\right) = f$$

TRANSFORMACE DIF. VÝRAZŮ

$f(x,y) = g(u,v)$

$$x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots \longrightarrow u, v, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \ldots \qquad f \in C^{1(k)}$$

I. $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ … $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

! $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

Příklad:

$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$, $u = \frac{x}{y}$, $v = y$ $\quad (y \neq 0,\ v \neq 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{1}{y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{-x}{y^2} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot 1$$

$y = v$
$x = v\cdot u$

$$x\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{1}{y}\right) - y\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{-1}{y^2} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{2x}{y}\frac{\partial g}{\partial u} - y\frac{\partial g}{\partial v} = 2u\frac{\partial g}{\partial u} - v\frac{\partial g}{\partial v}$$

II. $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

1. na předch. případ… $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$

Příklad:

$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = u\cdot v$, $y = v$; $u = \frac{x}{y}$, $v = y$

2. $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

Příklad: $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = u\cdot v$, $y = v$; $u = \frac{x}{y}$, $v = y$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot v + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{u}{v}\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = u\cdot v\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} - v\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{u}{v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\right) = 2u\frac{\partial g}{\partial u} - v\frac{\partial g}{\partial v}$$

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial u}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{u}{v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$

derivace transformačních rovnic:

$\frac{\partial}{\partial x}$: $(x = u\cdot v)\dots\ 1 = \frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x}$

$(y = v)\dots\ 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{v}$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $0 = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot v + u\frac{\partial v}{\partial y}$

$1 = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u}{v}$

4. $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} ; \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

Věta: Jacobiho matice inverzní transformace je inverzní k Jacobiho matici původní transf. (pro regulární transf. ... s nenulovým det. jac. matice).

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}v & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{v}\begin{pmatrix}1 & -0\\ -u & v\end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{v}\begin{pmatrix}1 & -u\\ 0 & v\end{pmatrix}$$

Příklad: $\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $x = \sin u$, $y = v$ $\rightarrow \cancel{\cos u}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos u}} + \frac{\partial g}{\partial v} = 0$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\cos u}}_{\neq 0}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos u\end{pmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + g\right) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial u} + g = \varphi(u)$

LDR 1.ř. v u

$g(u,v) = C_1(v)\cdot e^{-u} + C_2(u)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}^{=0} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}\cdot 1 ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot\frac{1}{\cos u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot 0$$

$$f(x,y) = C_1(y)\cdot e^{-\arcsin x} + C_3(x)$$

Příklad: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\dots) = \frac{\partial}{\partial r}(\dots)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\dots)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cdot\cos\varphi +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\sin\varphi - \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)\cdot\frac{-\sin\varphi}{r}$$

%

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cdot\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\varphi}\cdot\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\cdot\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}$$

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial g}{\partial r}} \rightarrow \text{ztransformovaný Laplaceův operátor}$$

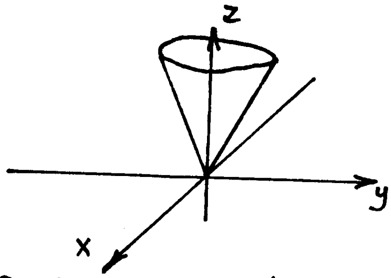
LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Def.: Řekneme, že f má v $\vec{a}$ lokální extrém (na prstencovém okolí)
- lokální minimum, jestliže existuje $P(\vec{a})$ tak, že $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$ pro $x \in P(\vec{a})$
- lokální maximum, , že $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$.

ostrý lokální extrém – ostrá nerovnost $<, >$

Příklad: 1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

v bodě $(0,0)$ lok. minimum : $f(0,0) = 0$
(je ostré)



2. $f(x,y) = x^2y^2$; v $(0,0)$ lok. minimum, protože fce je vždycky nezáporná
(není ostré) je neostré

3. $f(x,y) = x\cdot y$; v $(0,0)$ nemá lok. extrém
↳ sedlový bod – stacionární bod – $\operatorname{grad} f(0,0) = \vec{o}$

Pozn.: f má v $\vec{a}$ (ostré) lokální maximum, právě tehdy když $-f$ má v $\vec{a}$ (ostré) lokální minimum.

Věta: Nechť v bodě $\vec{a}$ je lokální extrém fce f, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$. Pak buď $f'_{\vec{h}}(\vec{a}) = 0$ nebo $f'_{\vec{h}}(\vec{a})$ neexistuje. – nutná podmínka

Důkaz: Definujeme $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{h})$, $\varphi'(0) = f'_{\vec{h}}(\vec{a})$
↳ má v 0 lokální extrém $\Rightarrow$ $\varphi'(0) = 0$ nebo neexistuje

Def.: Bod $\vec{a}$ se nazývá STACIONÁRNÍ BOD f, pokud $\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \vec{o}$.

Pozn. $d^2f(\vec{a})(\vec{h})$ = zobrazení, které vektoru $\vec{h}$ přiřadí $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\vec{a})\cdot h_i\cdot h_j$

Def.: Řekneme, že $d^2f(\vec{a})$ je
1. pozitivně definitní, je-li $d^2f(\vec{a})(\vec{h}) > 0$ pro $\vec{h} \neq \vec{o}$
2. negativně definitní, je-li $d^2f(\vec{a})(\vec{h}) < 0$ pro $\vec{h} \neq \vec{o}$
3. indefinitní, je-li $d^2f(\vec{a})(\vec{h}) < 0 < d^2f(\vec{a})(\vec{k})$ pro některé $\vec{h}, \vec{k}$.

Příklad: v prostoru $\mathbb{R}^3$:

1. $d^2f(\vec{a})(\vec{h}) = h_1^2 + 2h_2^2 + 5h_3^2$ $\quad \{h_1h_2 = h_1h_3 = h_2h_3 = 0\}$

vždy ≥ 0

pro $\vec{h} = \vec{o}$ $\ 0$ $\Rightarrow$ je pozitivně definitní

Př.: $-2h_1^2 - h_2^2 - 4h_3^2 \leq 0$ vždy, $= 0$ pro $\vec{h} = \vec{o}$ $\Big\} \Rightarrow$ příslušný diferenciál je negativně definitní

Př.: $h_1^2 + 2h_2^2 - h_3^2$ $\quad (1,1,0) \mapsto 3 > 0$, $(0,0,1) \mapsto -1 < 0$ $\Big\} \Rightarrow$ je indefinitní

Př.: $h_1^2 + h_2^2 \geq 0$ je nulový pro $(0,0,\text{cokoliv}) \mapsto 0$, tomuto diferenciálu se říká pozitivně indefinitní

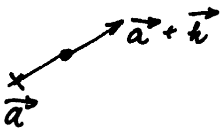
TAYLORŮV POLYNOM FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH:

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + \underbrace{df(\vec{a})(\vec{h})}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 f(\vec{a} + t\vec{h})(\vec{h})$$

$t \in (0,1)$ – závisí na vektoru $\vec{h}$

stac. bod $\vec{a}$, $f \in C^1$, pak

{f je třídy C^1}



Věta: nechť $f \in C^2$ na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in G$ je stacionární bod, pak platí:
1. je-li $d^2 f(\vec{a})$ pozit. def., pak f má v $\vec{a}$ ostré lok. minimum.
2. je-li $d^2 f(\vec{a})$ negat. def., pak f má v $\vec{a}$ ostré lok. maximum.
3. je-li $d^2 f(\vec{a})$ indefinitní, pak f má v $\vec{a}$ lokální extrém

Pozn. $n = 1$ – případ 1 proměnné

$d^2 f(a)(h) = f''(a)\, h^2$

$\longmapsto$ jde jen o vyšetření znaménka 2. derivace

Příklad:
1. $f(x,y) = x^2 y^2$ v $(0,0)$ neostré lok. min. $\quad d^2 f(0,0)(\vec{h}) = 0$
2. $f(x,y) = x^3 + y^3$ v $(0,0)$ není lok. extrém $\quad d^2 f(0,0)(\vec{h}) = 0$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4$ v $(0,0)$ ostré lok. minimum $\quad d^2 f(0,0)(\vec{h}) = 0$

Příklad: $f(x,y) = 3x^2 - 6xy - 2y^3$, $D(f) = \mathbb{R}^2$

hledáme stacionární bod: jsou to $(0,0)$, $(-1,-1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - 6y = 0 \Rightarrow y = x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x - 6y^2 = 0$

$-6x - 6x^2 = 0$, $x(x+1) = 0$ $\quad x_1 = 0 \quad y_1 = 0$, $\quad x_2 = -1 \quad y_2 = -1$

$$d^2 f(\vec{a})(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a})\, h_1^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot h_2^2 = 6h_1^2 - 12 h_1 h_2 - 12 a_2 h_2^2$$

$y = a_2$

$d^2 f(0,0)(h_1,h_2) = -6h_1^2 - 12 h_1 h_2$ $\quad (1,0) \mapsto 6 > 0$, $(1,1) \mapsto -6 < 0$ $\Big\} \Rightarrow$ diferenciál je indefinitní a v $(0,0)$ není lokální extrém

$$d^2 f(-1,-1)(h_1,h_2) = 6h_1^2 - 12 h_1 h_2 + 12 h_2^2 = 6\left[h_1^2 - 2h_1 h_2 + 2h_2^2\right] =$$
$$= 6\left[(h_1 - h_2)^2 + h_2^2\right] \geq 0 \text{ vždy}$$

$= 0$ $h_1 = h_2 = 0$, tedy $\vec{h} = \vec{o}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ je pozitivně definitní a v $(-1,-1)$ je ostré lok. minimum: $f(-1,-1) = -1$

JEDNODUŠŠÍ ZPŮSOB POMOCÍ HESSOVY MATICE

Hessova matice:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$
D_1, D_2, D_n

Berou se submatice a počítají se jejich determinanty

$$D_k = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} \end{pmatrix}$$

Věta: SYLVESTROVO KRITÉRIUM říká, že

1. $d^2 f(\vec{a})$ je pozitivně definitní, právě tehdy, když $D_1 > 0, D_2 < 0, \dots, D_n > 0$
2. $d^2 f(\vec{a})$ je negativně $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0$
3. je-li $D_n \neq 0$ a pokud nenastalo 1. ani 2., je $d^2 f(\vec{a})$ indefinitní.

Příklad: viz. ↑ $f(x,y) = 3x^2 - 6xy - 2y^3$

HESSOVA MATICE $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -12y \end{pmatrix}$ pro bod $(0,0)$: $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} D_1 = 6 > 0 \\ D_2 = -36 < 0 \end{matrix}\right\}$ nastala 3. situace

INDEFINITNÍ ⇒ neexistuje lok. extrém.

pro bod $(-1,-1)$: $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} D_1 = 6 > 0 \\ D_2 = 12 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 36 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ pozitivně definitní (ostré lokální minimum)

Příklad: fce 3. proměnných

$f(x,y,z) = 3xz - x^3 - y^2 - \frac{1}{2} z^2 + 2y - 2z$

1. Spočítáme parciální derivace, které položíme rovny 0

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3z - 3x^2 = 0 \Rightarrow z^* = x^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3x - z - 2 = 0$

$3x - x^2 - 2 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

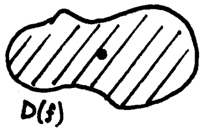
Stacionární body jsou $(2,1,4)$, $(1,1,1)$

Hessova matice $\begin{pmatrix} -6x & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ↗ MUSÍ VYJÍT SYMETRICKÁ, KDYŽ NENÍ JE TO ~~BLBĚ~~!

$(2,1,4)$: $\begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} D_1 = -12 < 0 \\ D_2 = 24 > 0 \\ D_3 = -6 < 0 \end{matrix}\right\}$ Podle Sylvestrova kriteria je $d^2 f(2,1,4)$ negativně definitní $\Rightarrow f(2,1,4) = -1$ je ostré lokální maximum.

$(1,1,1)$: $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} D_1 = -6 < 0 \\ D_2 = 12 > 0 \\ D_3 = 6 > 0 \end{matrix}\right\}$ $d^2 f(1,1,1)$ je indefinitní $\Rightarrow$ v $(1,1,1)$ není lok. extrém

Věta: Spojité fce na omezené uzavřené množině nabývá maxima i minima.



extrém uvnitř … lokální

na hranici … vázané extrémy

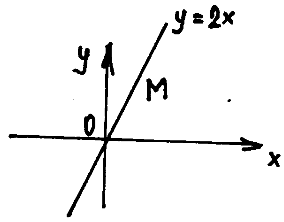
f: definována na otevřené $G \subset \mathbb{R}^n$, $M \subset G$: $g_1(\vec{x}) = 0, \dots$, hledáme extrémy na M

I. snížíme počet proměnných

1. Z vazeb vyjádříme některé proměnné pomocí ostatních

Př.: $f(x,y) = y - x^2$, $M: 2x - y = 0$

$y = 2x$



$g(x) = f(x, 2x) = 2x - x^2$ … hledáme l. extrém této fce

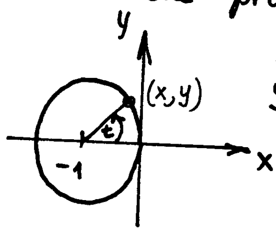
$g'(x) = 2 - 2x = 0 \dots x = 1$ $\therefore$ $g(1) = 1$ ostré lokální maximum g

$g''(x) = -2 < 0$ $\therefore$ $f(1,2) = 1$ vázané ostré lok. maximum na M

2. Parametrizace – staré proměnné se vyjádří pomocí méně proměnných

Př.: $f(x,y) = x + y + 1$, $M: x^2 + 2x + y^2 = 0$

$(x+1)^2 + y^2 = 1$



$x = -1 + \cos t$

$y = \sin t$

$t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$g(t) = f(-1 + \cos t, \sin t) = \cos t + \sin t$

$g'(t) = +\cos t - \sin t = 0 \dots t_1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ – ~~max~~ $g = \max\limits_M f = f\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$t_2 = \frac{5}{4}\pi$ $\quad g\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}$ – min $g = \min\limits_M f = f\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

II. Lagrangeova metoda multiplikátorů

$G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f \in C^1(G)$

M: $g_1(\vec{x}) = 0 \quad \text{grad } g_1(\vec{x})$

$\vdots \qquad \vdots$

$g_p(\vec{x}) = 0 \quad \text{grad } g_p(\vec{x})$ } lineárně nezávislé na M $\quad \text{hod}\begin{pmatrix} \text{grad } g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \text{grad } g_p(\vec{x}) \end{pmatrix} = p$

Sestavme $F(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \dots - \lambda_p g_p(\vec{x})$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 & g_1(\vec{x}) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 & g_p(\vec{x}) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} n+p \text{ rovnic} \\ \text{pro } n+p \text{ neznámých} \end{array}$$

Příklad: $f(x,y) = x + y + 1$, $M: \underbrace{x^2 + 2x + y^2}_{g_1(x,y)} = 0$

grad $g_1(x,y) = (2x+2, 2y) \neq (0,0)$: $(x,y) \neq (-1,0)$

$F(x,y) = x + y - 1 - \lambda(x^2 + 2x + y^2)$

$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 1 - \lambda \cdot (2x+2)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1 - \lambda \cdot 2y = 0$, vazební rovnice $x^2 + 2x + y = 0$: SOUSTAVA TŘÍ ROVNIC

$x = \frac{1}{2\lambda} - 1 \qquad y = \frac{1}{2\lambda} \qquad \frac{2}{4\lambda^2} = 1 \qquad \lambda^2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hessova matice F: $\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$

1. pro x_1, y_1: $d^2F(x_1, y_1)$

$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \end{array}\right\}$ negativně definitní, OSTRÉ LOK. MAX

2. pro x_2, y_2

$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \end{array}\right\}$ pozitiv. def. OSTRÉ LOK. MINIMUM

Př.: $f(x,y,z) = xyz$, M: $\underbrace{x+y-1=0}_{g_1(x,y,z)}$, $\underbrace{y+z=0}_{g_2(x,y,z)}$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} g_1(x,y,z) \\ \operatorname{grad} g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ldots \text{hod} = 2 - \text{lineárně nezávislé}$$

$$F(x,y,z) = xyz - \lambda(x+y-1) - \mu(y+z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = yz - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = xz - \lambda - \mu = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = xy - \mu = 0$$

$$x + y - 1 = 0 \ \ldots \ y = 1 - x$$

$$y + z = 0 \qquad z = x - 1$$

$(x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$

$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\lambda_2 = -\frac{4}{9}$, $\mu_2 = \frac{2}{9}$

Hessova matice F: $\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$

1. pro (x_1, y_1, z_1): $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

omez. na $\vec{h}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$ $\quad$ $h_1 + h_2 = 0$, $h_2 + h_3 = 0$

$h_2 = -h_1$, $h_3 = -h_2 = h_1$, $\vec{h} = (h_1, -h_1, h_1)$

$$d^2F(x,y,z)(h_1, h_2, h_3) = 2z h_1 h_2 + 2y h_2 h_3 + 2x h_3 h_2$$

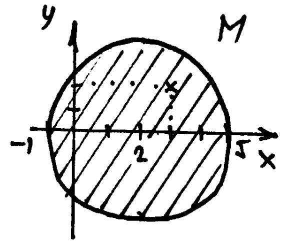
$$d^2F(x,y,z)(h_1, -h_1, h_1) = -2z h_1^2 + 2y h_1^2 - 2x h_1^2 = 2(-z+y-x) h_1^2$$

1. $d^2F(1,0,0)(h_1, -h_1, h_1) = -2h_1^2$ … „negat. definitní v h_1" $f(1,0,0) = 0$ je vázané ostré lok. max

2. $d^2F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)(h_1, -h_1, h_1) = 2h_1^2$ … „pozitivně definitní v h_1" $f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{29}$ je vázané o. l. min.

Př.: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$, M: $x^2 + y^2 - 4x \leq 5$

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 3^2$$



1. stacionární body uvnitř M

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 6 = 0 \quad x = 3 \qquad (3,2) \in M$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 4 = 0 \quad y = 2$$

vázané extrémy $F(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 - \lambda(\underbrace{x^2 + y^2 - 4x - 5}_{g(x,y)})$

$\operatorname{grad} g(x,y) = (2x - 4, 2y) \neq 0$ na kružnici

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x - 6 - \lambda(2x - 4) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y - 4 - \lambda(2y) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

$x = 2 + \frac{1}{1-\lambda}$, $y = \frac{2}{1-\lambda}$ $\qquad \frac{5}{(1-\lambda)^2} = 9$, $\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \frac{9}{5}$

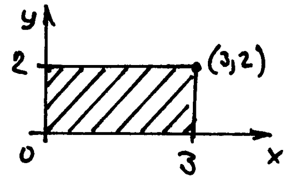
$x_1 = 2 + \frac{3}{\sqrt{5}}$, $y_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}$ $\qquad f(x_1, y_1) = 12 - 6\sqrt{5} \doteq -1{,}4$

$x_2 = 2 - \frac{3}{\sqrt{5}}$, $y_2 = -\frac{6}{\sqrt{5}}$ $\qquad f(x_2, y_2) = 12 + 6\sqrt{5} \doteq 25{,}4$ … $\max\limits_M f$

$f(3,2) = -2$ … $\min\limits_M f$

$f(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 2$

Příklad: Určete MAX i MIN funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x$
$M = \langle 0,3\rangle \times \langle 0,2\rangle$



I. Vyšetřujeme vnitřek M … lok. extrémy … stacionární body

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y - 2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x \quad = 0$$
$\Rightarrow$ nemá řešení, maxima i minima na hranici

II. 4 strany … 4 rovnice pro části hranice

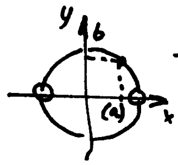
1. $y = 0$: $f(x,0) = x^2 - 2x = f_1(x)$ … l. extr. na $(0,3)$ … $x = 1$, $\min f = f(1,0) = -1$
2. $y = 2$: $f(x,2) = x^2 + 2x + 4 = f_2(x)$ … l. extr $x \in (0,3)$ … $x = -1 \notin (0,3)$
3. $x = 0$: $f(0,y) = y^2 = f_3(y)$ … l. extr. $y \in (0,2)$ … $y = 0 \notin (0,2)$
4. $x = 3$: $f(3,y) = y^2 + 4y + 3 = f_4(y)$ … l. extr. $y \in (0,2)$ … $y = -3 \notin (0,2)$

III. $f(0,0) = 0$ $\quad f(3,0) = 3$
$f(0,2) = 4$ $\quad f(3,2) = 19 = \max f$ $\Big\}$ na krajích

Funkce zadané implicitně

$F(x,y) = 0 \dots \; y = f(x)$

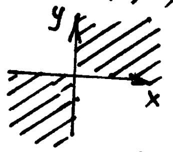
Př.: 1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$



$y = \sqrt{1-x^2}$

$y = -\sqrt{1-x^2}$

2. $x^2 + y^2 + 1 = 0 \dots \emptyset$
3. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 0 \dots (1,3)$
4. $|xy| - xy = 0$



Věta: Nechť $F(x,y)$ je třídy C^1 v okolí $(\vec{a}, b)$, $F(\vec{a}, b) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{a}, b) \neq 0$;
Pak existuje okolí bodu $\vec{a}$ funkce $f \in C^1(U)$, tak že $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0$ pro $\vec{x} \in U$.
Navíc $f'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \Big/ -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$

Důkaz:
$$\frac{d\left(F(x, f(x))\right)}{dx} : \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$
$$\frac{d^2}{dx^2} : \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x)) \cdot f'(x)\right) f'(x) +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f''(x) = 0$$

Příklad: $\overbrace{x^2 + y^2 - 1}^{F(x,y)} = 0 \dots \; y = y(x)$ … lok. extrém

1. ověříme si předpoklady věty $F(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y \neq 0$ pro $y \neq 0$

$x^2 + y(x)^2 - 1 = 0$

$\frac{d}{dx} : 2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \nearrow y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$, $2x = 0 \dots x = 0 \dots y^2 - 1 = 0, \dots y = \pm 1$

$(0,1)$ … extrém fce $y_1(x)$ v okolí 0, která má v 0 stac. bod $\quad y_1(0) = 1$
$(0,-1)$ … $\quad y_2(x) \quad 0$, $\quad y_2(0) = -1$

$\longrightarrow$

$\frac{d^2}{dx^2}$: $2 + 2y'(x)^2 + 2\,y(x)\cdot y''(x) = 0$, $y''(x) = -\frac{1}{y(0)}$

$y_1''(0) = -1 < 0$ ... v 0 je ostré lok. max.

$y_2''(0) = 1 > 0$ ... v 0 je ostré lok. min.

$F(x,y,z) = \underbrace{f(x,y)}_{\to \text{ nějaká plocha konstantnosti}} - z$

grad $F(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), -1\right)$ = vektor kolmý na

Př.: $\underbrace{z^3 - 2x^2 - xyz}_{F(x,y,z)} = 0$, $(1,3,2)$ ... $z = z(x,y)$

grad $(1,3) \to = \left(\frac{10}{9}, \frac{2}{9}\right)$

1. $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ✓
2. $F(1,3,2) = 8 - 2 - 6 = 0$ ✓
3. $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 - xy$, $\frac{\partial F}{\partial z}(1,3,2) = 12 - 3 = 9 \neq 0$ ✓

$\Rightarrow \exists z = z(x,y)$ v okolí $(1,3)$

$z(x,y)^3 - 2x^2 - xy\,z(x,y) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $3z(x,y)^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - 4x - y z(x,y) - xy\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $3z(x,y)^2 \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - xz(x,y) - xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0$

$(1,3)$ ... $z(1,3) = 2$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1,3) - 10 = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,3) - 2 = 0$

Poznámka: $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$: $6z(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 3z(x,y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) - z(x,y) - x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) -$

$- y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) = 0$

$(1,2,3)$: $\frac{24}{9} + 12\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,3) - 2 - \frac{10}{9} - \frac{6}{9} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,3) = 0$

$9\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,3) = \frac{10}{9}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,3) = \frac{10}{81}$

Věta: $\vec{y}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$; Nechť $F(\vec{x},\vec{y})$, $G(\vec{x},\vec{y})$ jsou třídy C^1 v okolí $(\vec{a},\vec{b})$,

$F(\vec{a},\vec{b}) = G(\vec{a},\vec{b}) = 0$ a $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}(\vec{a},\vec{b}) ; & \frac{\partial F}{\partial y_2}(\vec{a},\vec{b}) \\ \frac{\partial G}{\partial y_1}(\vec{a},\vec{b}) ; & \frac{\partial G}{\partial y_2}(\vec{a},\vec{b}) \end{pmatrix} \neq 0$

Pak existuje fce f, g třídy C^1 na okolí $\vec{a}$ tak, že platí

$F(\vec{x}, f(\vec{x}), g(\vec{x})) = 0$, $G(\vec{x}, f(\vec{x}), g(\vec{x})) = 0$ na okolí $\vec{a}$

Příklad: $x - y - u - v = 0 \; - F(x,y,u,v)$ $\quad (1,-1,1,-1),\; u = u(x,y)$

$ux + vy - 2 = 0 \; - G(x,y,u,v)$ $\quad v = v(x,y)$

1. $F, G \in C^{\infty}(\mathbb{R}^4)$
2. $F(1,-1,1,-1) = 0,\; G(1,-1,1,-1) = 0$
3. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$; $(1,-1,1,-1)$: $\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$ $\Bigg\}$ $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ (C^{∞}) v okolí $(1,-1)$

$$x - y - u(x,y) - v(x,y) = 0$$
$$xu(x,y) + yv(x,y) = 0$$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $1 - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$

$u(x,y) + x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$

$(1,-1),\; u(1,-1) = 1,\; v(1,-1) = -1$

$1 - \frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) - \frac{\partial v}{\partial x}(1,-1) = 0$

$1 + \frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) - \frac{\partial v}{\partial x}(1,-1) = 0$

$\frac{\partial v}{\partial x}(1,-1) = 1,\; \frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: ..... $\frac{\partial u}{\partial y}(1,-1) = 1,\; \frac{\partial v}{\partial y}(1,-1) = 0$

ČÍSELNÉ ŘADY

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = \mathbb{R}^*$

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\quad \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$

Definice: Nekonečná číselná řada je zápis $a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$; číslo a_k se nazývá k-tý člen řady.

Definice: Pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ je N-TÝ ČÁSTEČNÝ SOUČET.
Jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, pak řada má součet S, $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Řekneme, že řada KONVERGUJE, je-li $\lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{C}$
DIVERGUJE, je-li $\lim_{n\to\infty} S_n \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$
OSCILUJE, pokud $\lim_{n\to\infty} S_n$ neexistuje

Příklady:

1. $\underbrace{1+1}_{2}+1+1+\ldots+1+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 1$; S_n: $1, 2, 3$ ↳ k-tý člen
$S_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow$ Diverguje

2. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$
$1 + (-1) + 1 + (-1)$
S_n: $1, 0, 1, 0$ ... nemá limitu $\Rightarrow$ osciluje

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ ... řada konverguje
S_n: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ $\quad S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$

4. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots + (-1)^{k-1} k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k$; $\sum_{k=1}^{2n} a_k = (1-2) + (3-4) + \ldots + ((2n-1) - 2n) = -n \to -\infty$ — DIVERGUJE V KOMPLEXNÍM OBORU

$\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = 1 + (-2+3) + \ldots + (-2n + (2n+1)) = n+1 \to +\infty$

V $\mathbb{R}$ limitu nemá - OSCILUJE $|$ v $\mathbb{C} \to \infty$

Poznámka: • $s_n' = \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n'$

ad 2) $s_1' = 1$, $s_2' = \frac{1}{2}$, $s_3' = \frac{2}{3}$, $s_4' = \frac{1}{2}$, $\dots \to \frac{1}{2}$

• $\sum\limits_{k=M} a_k$ … supremum konečných součtů kladných členů + + infimum konečných součtů záporných členů

Aritmetická řada s diferencí d

$$a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (a_1 + (k-1)d)$$

Příklad: 1. $1+1+1+\dots \quad d=0$

2. $1+2+3+\dots \quad d=1 \qquad \dots\; 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

3. $-2+1+4+\dots \quad d=3$

$$\left.\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ s_n &= a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \end{aligned}\right\} 2s_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + \dots + (a_n - a_1) = (a_1+a_n)\cdot n$$

n-tý částečný součet: $s_n = \frac{1}{2}\cdot n \cdot (a_1 + a_n)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \begin{cases} +\infty & \text{pro } d>0 \\ -\infty & \text{pro } d<0 \\ 0 & \text{pro } d = a_1 = 0 \end{cases}$$

Poznámka: $1^k + 2^k + \dots + n^k = P_{k+1}(n)$

Geometrická řada s kvocientem q

$$a_1 + (q a_1) + (q^2 a_1) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} a_1$$

Příklad: 1. $1+1+1+1+\dots \quad q=1$

2. $1-1+1-1+\dots \quad q=-1$

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad q = \frac{1}{2}$

n-tý částečný součet:
$$\left.\begin{aligned} s_n &= a_1(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) \\ q\cdot s_n &= a_1(q^n + q^{n-1} + \dots + q^2 + q) \end{aligned}\right\} (1-q)s_n = a_1(1-q^n)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{pro } q \neq 1, \quad \text{když } q=1 \quad s_n = n\cdot a_1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro } |q|<1$$

$= +\infty$ pro $q \geq 1$, $=$ neex pro $q \leq -1$ } v $\mathbb{R}$

v $\mathbb{C}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \infty & \text{pro } |q|>1 \text{ nebo } q=1 \\ \text{neex.} & \text{pro } |q|=1,\ q\neq 1 \end{cases}$

Příklad: 1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \qquad a_1 = \frac{4}{3},\ q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$

Příklad: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$

$1-\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{3}$, $1-\frac{1}{4}$ … $s_n = 1 - \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$

Příklad: $\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(k-(k+1)\right)}_{-1} = (1-2)+(2-3)+(3-4)+\dots = +\infty$

Věta: Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují, $c \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Pak $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$; $\sum_{k=1}^{\infty} c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Věta: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když konvergují $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$.

Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$

Věta: Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ KONVERGUJE, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz: $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOUČET ŘADY}}}{S} - S = 0$

Příklad: harmonická řada

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$$

$$\underbrace{\underbrace{1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}}}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}}}_{2\frac{1}{2}} \quad \dots \to \infty$$

Věta: Je-li $a_k \geq 0$ pro každé $k\in\mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Důkaz: s_n je neklesající … má limitu $= \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$

Věta: SROVNÁVACÍ KRITERIUM

Nechť $0 \leq a_k \leq b_k$ pro každé $k\in\mathbb{N}$. Pak platí:

1. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
2. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Důkaz: s_n … částečný součet s a_k ; t_n … část. součet s b_k … $s_n \leq t_n$ $\downarrow n\to\infty$

využíváme větu o limitě monotónní posloupnosti

Př.: 1. $\sum_{k=1} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \overset{\text{ODHAD SHORA}}{\leq} 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2$

tedy i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverguje

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ... konverguje, tedy i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konverguje

$\alpha \geq 2$

3. $\alpha \in (0, 1\rangle$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ ... diverguje, tedy i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ diverguje

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ +\infty & \text{pro } q = 1 \end{cases}$$

Věta: PODÍLOVÉ KRITERIUM

Nechť $a_k > 0$ pro každé $k \in N$

1. Jestliže $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

2. Jestliže $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje

Důkaz: 2. $a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq a_1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_1 = +\infty$

nekonečně mnoho součet stejných kladných hodnot

1. $a_{k+1} \leq q \cdot a_k \leq q^2 \cdot a_{k-1} \leq \dots \leq q^k \cdot a_1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} a_1 = \frac{a_1}{1-q} \in \mathbb{R}$

to už je geometrická řada, předpoklad $q < 1$

Př.: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$; $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{3} < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty}$ $\qquad \leq \frac{1}{2} < 1$

$\sum_{k=0}^{\infty}$ $\qquad \leq 1 \not< 1$ ale když přidáme sčítanec na konvergenci se to neprojeví

Pozn.: Lze vypustit konečně mnoho členů řady (pro vyšetření konvergence)

Věta: (Limitní tvar podílového kriteria)

Nechť $a_k \geq 0$ pro každé $k \in N$

1. Jestliže $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje

2. Jestliže $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje

Příklad: 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!/2^{k+1}}{k!/2^k} = \frac{k+1}{2} \xrightarrow{k \to \infty} +\infty > 1 \Rightarrow$ řada konverguje

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ – viz předchozí příklady

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 1$$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$; $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \xrightarrow{k \to \infty} 1$

Věta: ODMOCNINOVÉ KRITERIUM

Nechť $a_k \geq 0$ pro každé $k \in N$

1. je-li $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje
2. je-li $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje

Důkaz: 2. $a_k \geq 1$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$

1. $a_k \leq q^k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} < \infty$

Věta: LIMITNÍ TVAR ODM. KRITERIA

Nechť $a_k \geq 0$ pro každé $k \in N$

1. je-li $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (lim sup)
2. je-li $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, pak diverguje (lim inf)

Př.: 1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\ln^k \cdot (k+1)}$

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{\sqrt[k]{3}}{\ln(k+1)} \xrightarrow{k \to \infty} 0 < 1 \text{... konverguje}$$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}$, $\sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{\sqrt[k]{k^{10}}} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{2}{1} > 1$ ... diverguje

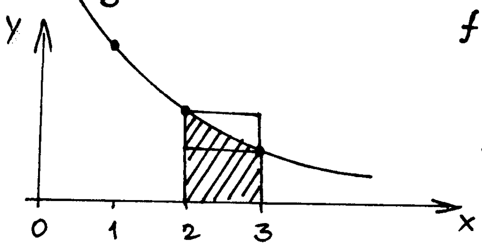
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$, $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 1$ ... kritérium nerozhodne

$$a_k = \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} \to e^{-1} \neq 0 \text{... diverguje}$$

4. $1 + 2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \dots$; $\frac{a_{k+1}}{a_k} \in \{2, \frac{1}{4}\}$ ... podíl. kriterium nerozhodne

$$\sqrt[k]{a_k} \leq \frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Integrální kriterium



$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$$

$$f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Věta: Nechť f je nezáporná nerostoucí (integrovatelná) funkce na $\langle 1, \infty)$.

Pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Příklad: 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ... fce $\frac{1}{x}$ je nezáporná, nerostoucí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^{\infty} = +\infty \Rightarrow \text{integrál diverguje a tedy i řada div.}$$

2. $\alpha > 1$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ ... fce $\frac{1}{x^{\alpha}}$ ... splňuje předpoklady

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\infty} = 0 - \frac{1}{-\alpha+1} = \frac{1}{1-\alpha} < +\infty \Rightarrow \text{řada konverguje}$$

3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot \ln k}$; $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\cdot \ln x}\,dx = \left[\ln \ln x\right]_2^{\infty} = +\infty \Rightarrow$ řada diverguje

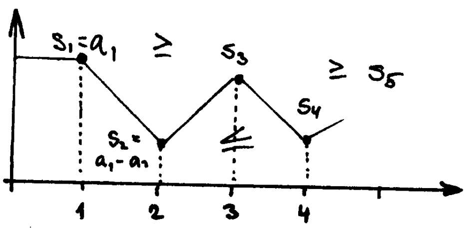
Příklad: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $\left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$; Jaké chyby se dopustíme při sečtení prvních 100 členů?

$$\sum_{k=101}^{\infty} \frac{1}{k^2} \begin{cases} \le \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{100}^{\infty} = 0{,}01 \\ \ge \int_{101}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{101}^{\infty} = \frac{1}{101} \doteq 0{,}0099 \end{cases}$$

Leibnizovo kriterium

$(a_k)_k$ nerostoucí, složená z nezáporných čísel

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$ každá monotonní posloupnost má limitu



$s_1, s_3, s_5 \dots$ je nerostoucí $\to s'$

$s_2, s_4, s_6 \dots$ je neklesající $\to s''$

$s' \ge s''$

$$s' - s'' = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} - \lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim (s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} a_k$$

Věta: Nechť (a_k) je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konverguje.

Př.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ pravidelně se střídají znaménka

$|a_k| = \frac{1}{k}$ ... je nerostoucí a $\to$ k 0 $\downarrow 0$ $\Rightarrow$ řada konverguje

Definice: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ KONVERGUJE ABSOLUTNĚ pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. (řada absolutních hodnot)

Př.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konverguje

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ diverguje $\Rightarrow$ konverguje neabsolutně

Věta.: Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

1. $a_k \in \mathbb{R}$:

	a_k^+	a_k^-
$a_k \geq 0$	a_k	0
$a_k \leq 0$	0	$-a_k$

$a_k^+, a_k^- \geq 0$

$a_k^+ - a_k^- = a_k$

$a_k^+ + a_k^- = |a_k|$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ... $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují (srovnávací kritérium)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \quad \text{konverguje}$$

2. $a_k \in \mathbb{C}$: $a_k = \operatorname{Re} a_k + j \operatorname{Im} a_k$, $0 \leq |\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \leq a_k$

$\sum |a_k|$ konverguje ... $\sum |\operatorname{Re} a_k|$, $\sum |\operatorname{Im} a_k|$ konverguje ... $\sum \operatorname{Re} a_k$, $\sum \operatorname{Im} a_k$ konverguje

Poznámka: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně ... $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$

Poznámka: podílové, odmocninové, integrální kritérium ... abs. konvergence.

$\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ ... řada konverguje absolutně; $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|} < 1$ ... ř. k. abs.

$|a_k| \leq b_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje ... $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně

Definice: PŘEROVNÁNÍM ŘADY $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ je každá řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$, kde f je prosté zobrazení $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$.

Věta: Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje absolutně a má stejný součet jako původní řada.

Důkaz: 1. $a_k \geq 0$ $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} a_{f(k)} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ $\quad \max\{f(1), \dots, f(n)\} = m_k$

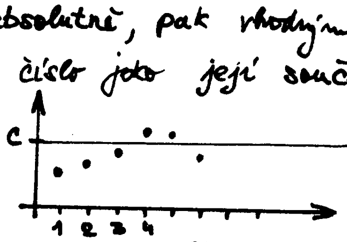
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $\quad$ přerovnáním se součet nezvětší, pův. je přerovnáním přerovnané na f^{-1}

2. $a_k \in \mathbb{R}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^+ - \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^- = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$

3. $a_k \in \mathbb{C}$: ... rozkladem na reálnou a imaginární část

Tvrzení: Konverguje-li řada neabsolutně, pak vhodným přerovnáním můžeme dostat libovolné předem dané číslo jako její součet.

Důkaz: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^-$



1. bereme nezáporné členy, až součet $\geq c$
2. bereme záporné až součet $< c$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = c$

Věta: Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. Pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ konvergují absolutně a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k}$.

Důkaz: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots = a_1 + 0 + a_3 + 0 + a_5 + 0 + \dots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots = 0 + a_2 + 0 + a_4 + 0 + a_6 + \dots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k$

POKRAČUJE →

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (l_k + s_k) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k + \sum_{k=1}^{\infty} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

Zkouška 5. úloh

1. DIFF. Rovnice (3 typy) interval řešení
2. Laploce (řešení rovnice)
3. Extrémy fcí - lokální, vázané, absolutní, fce dané implicitně
4. Diferenciály, tečné roviny, transformace, fce zadané implicitně
5. Teoretická (věta, definice, důkaz), případně řady