Vybrané vztahy z teorie elektromagnetického pole

1. Elektrostatické pole

Hustota náboje:

$$\tau = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l} \quad \sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} \quad \rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$$

Napětí a potenciál:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B E_t\,\mathrm{d}l = \varphi_A - \varphi_B$$

Součet napětí ve smyčce:

$$\oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_l E_t\,\mathrm{d}l = 0 \Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$$

Intenzita a potenciál od bodového náboje:

$$E = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} \quad \varphi = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r} + K$$

Intenzita a potenciál od nabité přímky:

$$E = \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon r} \quad \varphi = -\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon}\ln r + K$$

Elektrický silový a indukční tok:

$$\chi[\mathrm{V.m}] = \iint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S E_n\,\mathrm{d}S \Rightarrow \oiint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon}$$

$$\Psi[\mathrm{C}] = \iint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S D_n\,\mathrm{d}S \Rightarrow \oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q_0$$

E a D v anizotropním dielektriku:

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j \quad (\varepsilon_{ij} \text{ je symetrický tenzor})$$

E a D v izotropním dielektriku:

$$D = \varepsilon E \quad (\varepsilon \text{ je skalár})$$

Kapacita a dielektrický odpor:

$$C = \frac{Q}{U} \qquad R_d = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{\varepsilon S}$$

Kapacita deskového, kulového a válcového kondenzátoru:

$$C_d = \frac{\varepsilon S}{d} \quad C_k = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad C_v = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Vztahy mezi E a φ:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi \qquad \varphi = -\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Poissonova a Laplaceova rovnice:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \qquad \Delta\varphi = 0$$

Vektor polarizace:

$$\vec{p} = Q\vec{a} \qquad \vec{P} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}V}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \mathrm{div}\,(\frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0}) = \frac{\rho_0 - \mathrm{div}\,\vec{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 + \rho_v}{\varepsilon_0}$$

Podmínky na rozhraní:

$$D_{n1} = D_{n2} \qquad E_{t1} = E_{t2}$$

2. Stacionární elektrické pole

Ohmův zákon:

$$U = RI \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Jouleův zákon:

$$P = UI = RI^2 \qquad p = \vec{j}\vec{E}$$

Elektrický odpor:

$$R = \int_a^b \frac{\mathrm{d}l}{\sigma S} = \frac{1}{G} = \frac{U}{I}$$

Analogie mezi elektrostatickým a proudovým polem:

$$\vec{D} \sim \vec{J} \quad \varepsilon \sim \sigma \quad C \sim G \quad Q \sim I$$

Podmínky na rozhraní:

$$j_{n1} = j_{n2} \qquad E_{t1} = E_{t2}$$

3. Stacionární magnetické pole

Biotův-Savartův zákon:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r_0}}{r^2} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r_0}}{r^2}$$

Ampérův zákon:

$$\oint_l \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_l H_l\,\mathrm{d}l = I \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$$

Vektor magnetizace:

$$\mathrm{d}\vec{m} = I\,\mathrm{d}\vec{S} \quad \vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}V}$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \chi_m\vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H}$$

Magnetický indukční tok:

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S B_n\,\mathrm{d}S \qquad \oiint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

4. Kvazistacionární pole

Vlastní indukčnost:

$$L = \frac{\Phi_c}{I} \text{ (lineární prostředí)}$$

$$L = \frac{\mathrm{d}\Phi_c}{\mathrm{d}i} \text{ (nelineární prostředí)}$$

Vzájemná indukčnost v lineárním prostředí:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12c}}{I_1} = M_{21} = \frac{\Phi_{21c}}{I_2}$$

Neumannův vzorec:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi}\oint\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l_1}.\,\mathrm{d}\vec{l_2}}{r_{12}}$$

Hopkinsonův zákon:

$$U_m = NI = R_m\Phi$$

Magnetický odpor (reluktance):

$$R_m = \int_a^b \frac{\mathrm{d}l}{\mu S}\ [\mathrm{H}^{-1}]$$

Energie induktoru:

$$W = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2}LI^2 \qquad w = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$$

Podmínky na rozhraní:

$$B_{n1} = B_{n2} \qquad H_{t1} = H_{t2}$$

Rovnice kontinuity:

$$\oiint_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Rovnice kontinuity pro volné náboje:

$$\operatorname{div}\vec{J}_o + \frac{\partial \rho_o}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\sigma\frac{\vec{D}}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho_o}{\partial t} = 0$$

$$\rho_o(t) = \rho_o(0)e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} = \rho_o(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Rovnice kontinuity pro vázané náboje:

$$\operatorname{div}\vec{J}_p + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{J}_p + \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{P}) = 0$$

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Maxwellovy rovnice:

$$\oint_l \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = I_0 + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \rho_0$$

$$\oiint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

Okrajové podmínky:

$$\mathrm{Rot}\ \vec{H} = \alpha \qquad \mathrm{Rot}\ \vec{E} = 0$$

$$\mathrm{Div}\ \vec{D} = \sigma_0 \qquad \mathrm{Div}\ \vec{B} = 0$$

5. Elektromagnetické vlny

Maxwellovy rovnice pro harmonický průběh:

$$\oint_l \mathrm{\vec{H}}\,\mathrm{d}\vec{l} = I + \mathrm{j}\omega\Psi \qquad \operatorname{rot}\mathrm{\vec{H}} = \mathrm{\vec{j}} + \mathrm{j}\omega\mathrm{\vec{D}}$$

$$\oint_l \mathrm{\vec{E}}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{j}\omega\Phi \qquad \operatorname{rot}\mathrm{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\mathrm{\vec{B}}$$

$$\oiint_S \mathrm{\vec{D}}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q \qquad \operatorname{div}\mathrm{\vec{D}} = \rho$$

$$\oiint_S \mathrm{\vec{B}}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \operatorname{div}\mathrm{\vec{B}} = 0$$

Energetická bilance:

$$-\oiint_S (\vec{E}\times\vec{H})\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \vec{E}.\vec{J}\ \mathrm{d}V + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$-\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{E}.\vec{J} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Poyntingův vektor:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

Střední hodnota Poyntingova vektoru:

$$\vec{S}_{str} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{\vec{E}}\times\mathrm{\vec{H}}^*)$$

Vlnová rovnice pro prostředí bez zdrojů:

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

Homogenní Helmholtzova rovnice:

$$\Delta\mathrm{\vec{E}} + k^2\mathrm{\vec{E}} = 0$$

$$k^2 = -\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)$$

Rovinná homogenní vlna:

$$E(z,t) = E_{0m}e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z + \varphi_0)$$

Konstanta íření:

$$k = \beta - \mathrm{j}\alpha = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)}$$

Měrný posun:

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]}$$

Měrný útlum:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]}$$

Vlnová impedance:

$$\mathrm{Z} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma}}$$

Vlnová délka:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Fázová rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Ekvivalentní hloubka vniku:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

6. Vlny ve vodivém prostředí

Elektrický povrchový jev:

$$\mathrm{J}_y = \mathrm{J}_{max}\frac{\cos kz}{\cos kh} = \mathrm{J}_{max}\frac{\cosh(1+\mathrm{j})\alpha z}{\cosh(1+\mathrm{j})\alpha h}$$

$$\mathrm{J}_{min} = \mathrm{J}_{max}\frac{1}{\cosh(1+\mathrm{j})\alpha h}$$

Magnetický povrchový jev:

$$\mathrm{B}_y = \mathrm{B}_{max}\frac{\cos kx}{\cos ka} = \mathrm{B}_{max}\frac{\cosh(1+\mathrm{j})\alpha x}{\cosh(1+\mathrm{j})\alpha a}$$

$$\mathrm{B}_{min} = \mathrm{B}_{max}\frac{1}{\cosh(1+\mathrm{j})\alpha a}$$