OTÁZKY Z TEORIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

Letní semestr 2003/2004

poslední úprava 25. června 2004

1. **Síla současně působící na elektrický náboj v elektrickém a magnetickém poli (Lorentzova síla)**

$$\vec{F_m} = Q\left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})\right]$$

2. Klasifikace látek z hlediska polohy, směru a závislosti na $\vec{E}$ a $\vec{H}$.

   - Homogenní $\times$ nehomogenní – ve všech bodech stejné $\times$ různé vlastnosti;
   - izotropní $\times$ anizotropní – ve všech směrech stejné $\times$ různé vlastnosti;
   - lineární $\times$ nelineární – platí $\times$ neplatí princip superpozice;
   - stacionární $\times$ nestacionární – má časově stálé $\times$ proměnlivé vlastnosti.

3. Klasifikace elektromagnetických jevů – typy polí, jejich zdroje

   Rozlišujeme tato pole: *elektrostatické pole* (zdrojem jsou nepohyblivé náboje), *stacionární* proudové pole (zdrojem je stejnosměrný proud), *magnetostatické* pole, *kvazistacionární* (nízkofrekvenční proudy) a *nestacionární* elektromagnetické pole.

4. **Coulombův zákon, orientace vektorů**

   Mezi dvěma bodovými náboji působí Coulombova síla, která závisí přímo úměrně na velikosti nábojů a nepřímo na kvadrátu jejich vzdálenosti. Síla působí ve směru spojnice nábojů, náboje stejného znaménka se odpuzují. Konstanta ε_0 je permitivita vakua.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{r_0}$$

5. Co je a kdy lze použít princip superpozice

   Síla působící na libovolný náboj je rovna vektorovému součtu Coulombových sil od ostatních nábojů. Princip superpozice vyjadřuje způsob řešení elektrických polí sečtením složek jednotivých zdrojů – stejně jako složky vektorů (vyřešených samostatně) a tím získat výsledné řešení celé soutavy. Princip superpozice lze použít pouze v lineárním prostředí.

6. **Definice intenzity elektrického pole**

   Intenzita elektrického pole je rovna síle působící na jednotkový kladný náboj:

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{r_0}$$

7. Rovnice siločáry $\vec{E}$ obecně a zvláště v kartézských souřadnicích

   Siločára je myšlená orientovaná křivka, po níž by se pohyboval v elektrickém poli uvolněný kladný náboj. Každým bodem prostoru prochází pouze jediná siločára. Siločáry se nikde neprotínají. V elektrostatickém poli siločára začíná na kladném a končí na záporném náboji. Říkáme, že kladný náboj je zřídlem pole, záporný náboj je norou. Rovnice siločáry v kartézských souřadnicích:

$$\frac{E_x}{\mathrm{d}x} = \frac{E_y}{\mathrm{d}y} = \frac{E_z}{\mathrm{d}z}$$

8. **Vyjádření vektorového pole $\vec{E}$ pomocí skalárního pole potenciálu φ**

   Gradient skalárního potenciálu φ je vektor určující směr a velikost největšího růstu potenciálu (proti směru $\vec{E}$)

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0\right)$$

9. Skalární potenciál φ buzený elektrickým nábojem Q

   Potenciál bodu pole je roven energii, potřebné k přenesení jednotkového kladného náboje vnějšími silami (tedy proti silám pole) z bodu vztažného do bodu uvažovaného. Velikost konstanty K závisí na poloze vztažného místa (místa nulového potenciálu). Vztažný bod se často pokládá do nekonečna. Definujeme ho vztahem:

$$\varphi = -\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + K = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} + K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K$$

10. **$\vec{E}$ a φ buzené daným rozložením hustoty náboje ρ**

    Potenciální pole vyvolané obecnými zdroji (náboji s daným prostorovým uspořádáním) můžeme vyjádřit jako sumu (integrál) příspěvků jednotlivých elementárních nábojů, na které zdroje rozdělíme. Tomu se říká Greenovo fundamentální řešení.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{r^2}\vec{r_0} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{r} + K$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \frac{\sigma_0\,\mathrm{d}S}{r^2} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \frac{\sigma_0\,\mathrm{d}S}{r} + K$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau_0\,\mathrm{d}l}{r^2} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau_0\,\mathrm{d}l}{r} + K$$

11. Co je napětí a jak souvisí s $\vec{E}$ a φ

    Napětí je rozdíl potenciálů mezi dvěma body elektrostatického pole:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_B^A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

12. Jaký je charakter elektrostatického pole, rovnice, které ho popisují

    Elektrostatické pole je zřídlové (zřídla jsou náboje) a konzervativní (tzn., že cirkulace vektoru intenzity v elektrostatickém poli po uzavřené křivce je nulová). Konzervativní pole se také často nazývají nevírové či potenciální. Použitím Stokesovy věty poté dostaneme vztah pro diferenciální podobu vztahu. Jednoznačně je určeno rovnicemi:

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \iint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon} \qquad \oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}l = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

13. **Laplaceova a Poissonova rovnice pro elektrický skalární potenciál**

    Tyto rovnice získáme tak, že do vztahu $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho_0/\varepsilon$ dosadíme vztah $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$.

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vec{E} = -\nabla^2\varphi = \frac{\rho_0}{\varepsilon}$$

Takto dostaneme *Poissonovu rovnici*:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon}$$

V oblasti beze zdrojů (tj. vně zdrojů) se Poissonova rovnice redukuje na *rovnici Laplaceovu*:

$$\Delta\varphi = 0$$

Laplaceovy nebo Poissononovy diferenciální rovnice je výhodné použít při výpočtu polí, jejichž elektrody jsou ekvipotenciálními plochami o známém potenciálu. K úplnému řešení je nutné znát také okrajové podmínky, ty mohou být dvojího druhu:

- Dirichletova — na hranici řešené oblasti je znám potenciál φ,
- Neumannova — na hranici oblasti je známá normálová složka intenzity pole E_n.

Funkce φ vyhovující těmto rovnicím a okrajovým podmínkám se nazývají harmonické.

14. **Gaussova věta v elektrostatickém poli a definice elektrického toku**

Elektrický tok je definován takto:

$$\Psi = \iint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S E_n\,\mathrm{d}S\,.$$

Tok intenzity uzavřenou plochou je úměrný volnému náboji Q uzavřenému v této ploše (Gaussova věta):

$$\oiint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

Necháme-li objem uzavřený plochou limitovat k nule a dělíme-li obě strany rovnice tímto objemem, dostaneme diferenciální tvar Gaussovy věty. Výraz $\operatorname{div}\vec{E}$ má význam vydatnosti zdroje toku:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{Q_0}{\varepsilon\Delta V} = \frac{\rho_0}{\varepsilon}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

15. **Čemu se rovná $\vec{E}$ na povrchu vodiče**

Při vložení tělesa do vnějšího pole se na jeho povrchu vytvoří takové rozložení náboje, aby byla intenzita pole uvnitř tělesa nulová. Tomuto jevu se říká elektrostatická indukce. A náboji, který se na povrchu nashromáždí se říká indukovaný náboj.

Protože uvnitř vodiče je intenzita pole nulová, je také tok vektoru intenzity $\vec{E}$ z libovolné uzavřené plochy uvnitř vodiče nulový. To je možné pouze tehdy, pokud plocha neobklopuje žádný náboj. Z prvního vztahu pro $\vec{E} = 0$ (viz 8.) vyplývá, že vodivé těleso je ve statickém poli vždy ekvipotenciální plochou.

Protože je povrch vodivého tělesa ekvipotenciálou, musí k němu být siločáry kolmé. To znamená, že intenzita elektrického pole má na povrchu vodiče směr normály. Velikost intenzity určíme snadno pomocí Gaussovy věty. Náboj je na povrchu rozložen s plošnou hustotou σ_0. Nyní protneme povrch vodivého tělesa elementární válcovou plochou kolmou k povrchu, kterou uzavřeme dnem (slupkou tělesa) a víkem o plochách $\mathrm{d}S$. Uvedená plocha uzavírá náboj $\mathrm{d}Q_0 = \sigma_0\,\mathrm{d}S$. Tok vektroru $\vec{E}$ bude vycházet pouze víkem, vně vodivého tělesa. Proto je:

$$\oiint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = E_n\,\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

16. $\vec{E}$ osamocené neomezené nabité rovinné vodivé folie

Intenzitu určíme pomocí Gaussovy věty – rovinu protneme elementárním válcem průřezu $\mathrm{d}S$, kolmým na rovinu, který z obou stran uzavřeme. Vektor intenzity $\vec{E}$ je kolmý k rovině a směřuje na obě strany roviny.

$$E \cdot 2\,\mathrm{d}S = \frac{\sigma_0\,\mathrm{d}S}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon}$$

17. $\vec{E}$ a φ nabité vodivé koule

Vně koule (podle Gaussovy věty) je pole stejné jako od bodového náboje:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,, \quad \varphi = -\int E\,\mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + K \quad (r > R)\,.$$

Uvnitř koule je intenzita nulová, potenciál je konstantní a je roven potenciálu na povrchu koule:

$$E = 0\,, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + K \quad (r < R)\,.$$

18. $\vec{E}$ a φ dlouhého nabitého válcového vodiče

Náboj je rozložen na přímce s liniovou hustotou τ. Přímku obklopíme souosým válcem. Tok vektoru $\vec{E}$ prochází pouze pláštěm válce a je na něj kolmý. Z Gaussovy věty platí:

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau l}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}\,, \quad \varphi = -\int E\,\mathrm{d}r = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\int \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + K \quad (r > R)\,.$$

Uvnitř vodiče je intenzita nulová, potenciál je konstantní a je roven potenciálu na povrchu:

$$E = 0\,, \quad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln R + K \quad (r < R)\,.$$

19. Energie elektrostatického pole buzeného ρ, σ nebo soustavou elektrod

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\varphi_i \qquad W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,\mathrm{d}V \qquad W = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\,\mathrm{d}S$$

Pro energii pole buzeného ρ (spojité rozložení nábojů v prostoru), nahradíme v předchozím vztahu náboj Q vyjádřením $\rho\,\mathrm{d}V$ a sumu integrálem. Analogicky bychom dostali i vztah pro energii pole buzeného σ.

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi\,\mathrm{d}V$$

20. Energie elektrostatického pole vyjádřena pomocí vektorů pole

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D}\vec{E}\,\mathrm{d}V$$

21. Co je elektrický dipól, definice dipólového momentu, orientace použitých vektorů

Elektrický dipól je soustava dvou blízkých nábojů stejné velikosti a opačného znaménka, jejichž vzdálenost je vzhledem ke vzdálenosti pozorování zanedbatelná. Dipólový moment je roven součinu náboje Q a vzdálenosti mezi náboji: $\vec{p} = Q\vec{d}$. Vektor $\vec{p}$ má směr od záporného náboje ke kladnému.

22. Dipólový moment soustavy elektrických momentů

    Vložením dipólu do homogenního pole se dipól snaží natáčet tak, aby směry vektorů $\vec{E}$ a $\vec{p}$ splynuly. Dipól umístěný v poli bodového náboje (obdobně tak v obecném nehomogenním poli) bude natáčen a také vtahován do směru rostoucí intenzity pole. Kvadrupól jsou dva antiparalelní elementární dipóly, jeho potenciál klesá s třetí mocninou. Složitější seskupení dipólů se nazývá multipól.

23. Definice kapacity, význam všech použitých symbolů

    Kapacita je koeficient lineární závislosti mezi nábojem a potenciálem, charekterizuje množství náboje Q přeneseného vynaložením určité práce U. Je definována jako

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{U}\,.$$

24. Řešení Laplaceovy rovnice pro elektrický skalární potenciál v rovině (xy) kartézských souřadnic

    Hledáme analytické řešení rovnice

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

    ve tvaru $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$. Pro jednoduché případy polí lze k řešení Laplaceovy rovnice použít metody přímé integrace (pokud φ závisí pouze na jedné proměnné), separace proměnných, konečných diferencí nebo superrelaxační metodu. Úpravou Laplaceovy rovnice a pomocí separace proměnných dostaneme rovnici:

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = 0\,.$$

    Jednotlivé členy jsou na sobě nezávislé, proto můžeme rovnici rozdělit:

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = k_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = k_y^2, \quad k_x^2 + k_y^2 = 0\,.$$

    Dostali jsme dvě obyčejné diferenciální rovnice, které už umíme snadno vyřešit.

25. Gaussova věta v elektrostatickém poli, kdy ji lze použít k výpočtu $\vec{E}$

$$\oiint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}\,.$$

    Gaussova věta udává silový tok, procházející uzavřenou plochou. Určuje tzv. zřídlovost elekstostatického pole. Gaussovu větu můžeme s výhodou použít k výpočtu elektrických polí symetricky uspořádaných nábojů. Podmínkou je, že se nám podaří najít takovou plochu, uzavřenou kolem náboje (nábojů), která splňuje tyto podmínky:

    - plocha prochází bodem v němž intenzitu pole hledáme,
    - intenzita $\vec{E}$ má pouze normálovou složku E_n k nalezené ploše,
    - složka E_n je na této ploše konstantní. Na její části může být nulová.

    Jako např. prostorový náboj se sférickou, plošnou či lineární symetrií.

    Tyto podmínky jsou splněny jen v těch případech, kdy se dá vhodnou volbou souřadnic vyjádřit intenzita pole jako funkce jedné proměnné (rovina, válec, koule). Tohoto postupu lze použít také u složitějších polí, u nichž nejsou splněny uvedené předpoklady. Ale jen tehdy, pokud se dají pokládat za superpozice několika polí, u nichž všech tyto předpoklady splněny jsou.

26. Jakou úlohu má konformní zobrazení při výpočtu elektrostatického pole a jak se používá

    Tato metoda se používá k řešení polí složitějších tvarů. Princip řešení Laplaceovy rovnice metodou konformního zobrazení — hledané pole, které máme řešit, je dvourozměrné nehomogenní pole nabitých elektrod obecného tvaru. Toto pole geometricky transformujeme na pole homogenní, ve kterém řešení snadno nalezneme a výsledek transformujeme zpátky do původního pole. Transformace, která zachovává vlastnosti potenciálního pole musí být zprostředkovaná tzv. analytickou funkcí komplexní proměnné, tj. funkcí která vyhovuje Cauchyovým-Riemannovým podmínkám. Tato funkce se však obtížně hledá, ale existují jejich obsáhlé slovníky.

27. Schema výpočtu elektrického potenciálu ve vnitřním uzlu 2D čtvercové homogenní sítě superrelaxační metodou konečných diferencí

    Při výpočtu potenciálu postupujeme takto: nejdříve všem vnitřním uzlům sítě přiřadíme libovolnou počáteční hodnotu. Potom v uspořádaném sledu projdeme všechny vnitřní uzly a v každém určíme chybu podle vztahu:

    $$R = \frac{1}{4}\Big(\varphi(x,y+h) + \varphi(x,y-h) + \varphi(x+h,y) + \varphi(x-h,y)\Big) - \varphi(x,y)\,.$$

    Hodnotu potenciálu v aktuálním uzlu nahradíme novou hodnotou:

    $$\varphi_n(x,y) = \varphi_s(x,y) + \alpha R\,,$$

    kde α je relaxační koeficient. Aby metoda konvergovala, musí být $1 \le \alpha \le 2$. Tento postup opakujeme do té doby, až se nové hodnoty v žádném uzlu nebudou lišit o více než stanovenou odchylku.

28. Co je a jak je definována elektrická polarizace

    Vektor polarizace je definován jako objemová hustota dipólových momentů. Nebo také jako množství vázaného náboje, který se při polarizaci přesune, vztažené na jednotkovou plochu.

    $$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}\,.$$

29. Jak souvisí elektrická polarizace s prostorovým a plošným vázaným elektrickýn nábojem

    Velikost vektoru polarizace je rovna plošné hustotě vázaného náboje, který se při polarizaci přesune: $P_n = -\sigma_v$. Platí:

    $$|P_n| = \sigma_v \qquad \operatorname{div}\vec{P} = -\rho_v$$

30. Definice elektrické indukce, jak souvisí s elektrickou susceptibilitou a permitivitou v lineárních prostředích, co je zdrojem $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$

    Vektor elektrické indukce $\vec{D}$ je definován vztahem $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. Platí:

    $$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}\,.$$

    Bezrozměrná konstanta χ ($\chi > 0$) se nazývá *elektrická susceptibilita.*

    Zdrojem toku vektoru $\vec{E}$ jsou volné i vázané náboje:

    $$\oiint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0 + Q_v}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon}$$

    Zdrojem toku $\vec{D}$ jsou volné náboje:

    $$\oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q_0$$

Zdrojem toku vektoru $\vec{P}$ jsou vázané náboje:

$$\oiint_S \vec{P}\,\mathrm{d}\vec{S} = -Q_v$$

31. Gaussova věta elektrostatického pole v dielektriku a definice indukčního toku

Gaussova věta pro dielektrikum:

$$\oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q_0 \quad \operatorname{div}\vec{D} = \rho_0$$

Elektrický indukční tok Ψ uzavřenou plochou je roven velikosti volného náboje, který je v ploše uzavřen. Zdrojem toku vektoru $\vec{D}$ je pouze volný náboj.

$$\Psi = \oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

32. **Podmínky pro tečné složky pole $\vec{E}$, $\vec{D}$ na rozhraní dvou dielektrik, vyznačit orientaci normály k rozhraní**

Zvolíme integrační dráhu l tak, aby při $h \to 0$ dráha obepínala úsek rozhraní o délce $\mathrm{d}l$, pak ze vztahu $\oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = 0$ vyplývá vztah pro tečné složky:

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

33. **Podmínky pro normálové složky pole $\vec{E}$, $\vec{D}$ na rozhraní dvou dielektrik, vyznačit orientaci normály k rozhraní**

Abychom určili vztahy pro normálové složky vektorů pole na rozhraní dvou prostředí, budeme uvažovat elementární váleček o výšce $h \to 0$, který uzavírá část rozhraní tak, že jeho dno a víko leží na různých jeho stranách. Uvažovaná plocha obepíná (uzavírá) volný náboj s hustotou σ_0. Tok vektoru pláštěm válce je nulový. Platí:

$$\oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q_0 \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_0\,.$$

Odtud plyne, že normálové složky elektrické indukce nejsou spojité a jejich rozdíl je roven plošné hustotě náboje v uvažovaném bodě rozhraní. Pokud na rozhraní není přítomen volný náboj, tak jak to mezi dielektriky bývá, pak platí:

$$E_{1n}\varepsilon_1 = E_{2n}\varepsilon_2 \qquad D_{1n} = D_{2n}$$

34. **Celková kapacita kapacitorů řazených seriově a paralelně**

Kapacita kapacitorů řazených *sériově* (na všech kapacitorech je stejně veliký náboj, celkové napětí jednotlivých kapacitorů: $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ a z definice kapacity $C = Q/U$ plyne $\frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1} + \frac{Q}{U_2} + \cdots + \frac{Q}{U_n}$.):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\,.$$

Kapacita kapacitorů řazených *paralelně* (na všech kapacitorech je stejné napětí, celkový náboj je dán součtem včech kapacitorů $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$, po dosazení $Q = CU$ a vynásobení $1/U$):

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n\,.$$

35. **Energie nabitého kapacitoru**

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2}\frac{1}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

36. Definice elektrického proudu ve stacionárním proudovém poli

Proud je množství náboje procházející plochou za jednotku času:

$$\Delta I = \frac{\Delta q_c}{\Delta t} = Nq\vec{v}\Delta\vec{S}\,,$$

kde q_c je celkový náboj procházející plochou, N je koncentrace náboje, q je elementární náboj a $\vec{v}$ je rychlost pohybu nábojů. Výraz Nq vyjadřuje objemovou hustotu náboje: $Nq = \rho$.

Proudová hustota je množství náboje procházející jednotkovou plochou za jednotku času:

$$\vec{J} = Nq\vec{v} = \rho\vec{v} \qquad I = \iint\limits_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_S J_n\,\mathrm{d}S\,.$$

Za kladný směr proudu považujeme směr pohybu kladných nábojů.

37. **Rovnice kontinuity stacionárního proudu v integrálním a diferenciálním tvaru**

Ve stacionárním proudovém poli platí, že proud, který vtéká do libovolného objemu z něho musí ve stejné velikosti vytékat (1. Kirchhoffův zákon). V tomto poli je tedy tok vektoru proudové hustoty uzavřenou plochou nulový.

$$\oiint\limits_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \operatorname{div}\vec{J} = 0\,.$$

Rovnici $\oiint_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$ můžeme přepsat do tvaru $\sum_j I_j = 0$, což je známý Kirchoffův zákon.

38. Jaký je charakter stacionárního proudového pole, rovnice které ho popisují

Stacionární proudové pole je nezřídlové – to znamená, že proudové čáry jsou vždy uzavřené křivky. Popisují ho tyto rovnice:

$$\oiint\limits_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0\,, \qquad \oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = U_e\,.$$

Vně zdrojů je stacionární proudové pole nevírové:

$$\oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = 0\,.$$

39. **Ohmův zákon v diferenciálním a integrálním tvaru**

Ze vztahů $v = -bE$ a $\rho_e = -Ne$, dosazených do $J = \rho v$, dostaneme $J = NebE$, což je Ohmův zákon ve tvaru:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad \text{diferenciálním,} \qquad \frac{\int_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}}{\iint_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S}} = \frac{U}{I} = R \quad \text{integrálním.}$$

40. **Podmínky pro tečné a normálové složky $\vec{J}$ na rozhraní dvou vodivých prostředí, vyznačit orientaci normály k rozhraní**

Z rovnice kontinuity plyne podmínka pro normálové složky:

$$J_{n1} = J_{n2}\,.$$

Pro oblast mimo zdrojů platí pro tečné složky $\vec{E}$ to samé jako v elektrostatickém poli; z Ohmova zákona plyne podmínka

$$\frac{J_{t1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t2}}{\sigma_2} \,.$$

41. Definice elektromotorického napětí a jeho vztah ke svorkovému napětí zdroje

Elektromotorické napětí je práce rozdělujících sil nutných k přenesení kladného jednotkového náboje od záporné elektrody ke kladné. Je definováno vztahem

$$U_{e21} = \int_1^2 \vec{E}_r \, \mathrm{d}\vec{l} \,.$$

Svorkové napětí je rovno elektromotorickému napětí zmenšenému o úbytek na vnitřním odporu zdroje:

$$U_{12} = U_{e21} - R_i I \,.$$

42. Jouleovy ztráty v proudovém stacionárním poli

Elementární práce ΔA vykonaná polem při přenesení náboje Q na vzdálenost Δl je rovna $\Delta A = QE\Delta l = \rho \, \mathrm{d}V E \Delta l$, z tohoto vztahu odvodíme vztah pro výkon $\Delta P = \Delta A / \Delta t = \rho \, \mathrm{d}V E v = JE \, \mathrm{d}V$, potom také platí, že objemová hustota výkonu stacionárního proudu je

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \vec{E}\vec{J} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$$

Pro výkon spotřebovaný v objemu V je

$$P = \iiint_V \vec{E}\vec{J} \mathrm{d}V = JS \int E \, \mathrm{d}l = UI = RI^2$$

43. Definice odporu vodiče, celkový odpor rezistorů řazených seriově a paralelně

Odpor vodiče:

$$R = \int_0^l \frac{\mathrm{d}l}{\sigma S} = \frac{U}{I} = \frac{El}{JS} = \frac{El}{\sigma ES} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{1}{G} \,.$$

Odpor rezistorů řazených sériově:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \,.$$

Odpor rezistorů řazených paralelně:

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i = G_1 + G_2 \ldots + G_n = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \,.$$

44. **Biotův-Savartův zákon, nakreslete orientaci vektorů**

Biotův-Savartův zákon udává velikost magnetické indukce způsobené vodičem délky l protékaným proudem i v bodě P ve vzdálenosti r od tohoto vodiče.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i \, \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r_0}}{r^2} \,.$$

Směr vektoru $\vec{B}$ určíme *pravidlem pravé ruky* — palec pravé ruky položíme do směru proudu a ohnuté prsty ukazují směr indukce. Biotův-Savartův zákon spolu s principem superpozice umožňuje zformulovat vztah pro výpočet magnetického pole zdrojů s libovolnou geometrií. Vzhah $i \, \mathrm{d}\vec{l}$ můžeme nahradit kterýmkoliv ekvivalentním výrazem $\mathrm{d}Q\vec{v}$ nebo $\mathrm{d}V\vec{J}$.

45. Co je magnetická indukce a její definice pomocí pohybujícího se náboje Q, $\vec{J}$, $\vec{K}$ a I

Magnetická indukce $\vec{B}$ je vektorová veličina popisující silové působení magnetického pole na pohybující se náboj. Je definována pomocí vztahu pro Lorentzovu sílu:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}Q(\vec{v} \times \vec{B}) = I(\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}) = \mathrm{d}S(\vec{K} \times \vec{B}) = \mathrm{d}V(\vec{J} \times \vec{B})\,.$$

Její směr odpovídá směru stočení severního pólu magnetky v okolí proudového vodiče.

46. Definice magnetického toku

Magnetický tok je tok vektoru magnetické indukce plochou S:

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}\,.$$

47. Jaký je charakter magnetostatického pole, rovnice které ho popisují

Magnetostatické pole je nezřídlové a vírové. Je určeno vztahy (integrální tvar):

$$\oint_l \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I \qquad \oiint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0\,,$$

diferenciální tvar:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0\,.$$

48. Definice vektorového potenciálu, podmínka jednoznačnosti $\vec{B}$ určené pomocí $\vec{A}$

Vektorový magnetický potenciál je definován vztahem: $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$. Aby bylo pole definováno jednoznačně, položíme divergenci potenciálu rovnu nule: $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ (Coulombova podmínka).

49. Poissonova a Laplaceova rovnice pro vektorový potenciál a její obecné řešení v integrálním tvaru

Dosazením do Ampérova zákona ($\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J}$) získáme Poissonovu rovnici:

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}\,.$$

Pro oblasti vně zdrojů platí Laplaceova rovnice:

$$\Delta\vec{A} = 0\,.$$

Partikulární řešení Poissonovy rovnice má tvar (Greenovo řešení):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}}{r}\,\mathrm{d}V + \vec{K} \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{r} + \vec{K}\,,$$

kde $\vec{K}$ je vektorová konstanta.

50. **Ampérův zákon a kdy ho lze použít k výpočtu $\vec{B}$ nebo $\vec{H}$**

Ampérův zákon říká, že integrál $\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l}$ po libovolné křivce se rovná celkovému proudu, který křivka obepíná násobenému μ_0 (ve vakuu). Mimo jiné určuje, že magnetické pole je pole vírové. Ampérův zákon můžeme s výhodou použít k výpočtu magnetických polí s vyšší symetrií zdrojů (dlouhý přímý vodič, koule, válec, pole uvnitř toroidní cívky, velmi dlouhého solenoidu).

$$\oint_l \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\sum I \qquad \oint_l \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \sum I_0$$

Diferenciální tvar dostaneme použitím Stokesovy věty.

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}\,.$$

51. Magnetický tok vyjádřený pomocí vektorového potenciálu

Magnetický tok Φ určíme z vektorového potenciálu $\vec{A}$ pomocí Stokesovy věty:

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_S \mathrm{rot}\,\vec{A}\,\mathrm{d}S = \oint\limits_l \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{l}\,.$$

52. Definice magnetického skalárního potenciálu, kdy ho lze použít

Skalární magnetický potenciál je definován takto:

$$\vec{B} = -\mathrm{grad}\,\varphi_m \text{ nebo } \vec{B} = -\mu_0\,\mathrm{grad}\,\varphi_m.$$

Lze ho zavést jen v oblastech bez proudu ($\mathrm{rot}\,\vec{B} = 0$).

53. Co je magnetický dipól, definice dipólového momentu, orientace použitých vektorů

Magnetický dipól je magnetické pole kruhové smyčky o poloměru a, jehož velikost se vůči vzdálenosti pozorování h jeví jako zanedbatelná, tj. platí $a \ll h$. V tomto poli definujeme moment magnetického dipólu $\vec{m}$ jako vektor, jehož směr je určen směrem oběhu proudu ve smyčce pravidlem pravé ruky a jehož velikost je dána následujícím vztahem. Proudům, které tyto dipóly způsobují, říkáme vázané proudy a značíme je I_v.

$$\vec{m} = I_v\,\mathrm{d}\vec{S} = I_v \pi a^2 \vec{z}_0$$

Symbol $\mathrm{d}\vec{S}$ je orientovaná plocha proudové smyčky.

54. **Statická definice vlastní a vzájemné indukčnosti**

Uvažujeme-li lineární prostředí, je i závislost magnetického toku cívkou na proudu, který ho vyvolal, lineární a platí: $\Phi_c = N\Phi = LI$. Konstanta úměrnosti L se nazývá indukčnost (vlastní) a je definována vztahem

$$L = \frac{\Phi_c}{I}\,.$$

Mějme dvě cívky (N_1, I_1, N_2, I_2). První cívka vybudí tok Φ_1 a část tohoto toku Φ_{12} projde i druhou cívkou. Mezi proudem I_1 a magnetickým tokem Φ_{12} je lineární závislost. Konstanta úměrnosti této závislosti se nazývá vzájemná indukčnost:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12c}}{I_1}\,.$$

V lineárních prostředích platí $\Phi_{12c} = M_{12}I_1 = M_{21}I_2$.

55. Co je a jak je definována magnetizace

Vektor magnetizace $\vec{M}$ vyjadřuje míru uspořádanosti magnetických momentů. Je definován jako objemová hustota magnetických momentů:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}\,.$$

56. Jak souvisí magnetizace s prostorovými a plošnými vázanými proudy

Buď V objem, ve kterém je vektor magnetizace konstantní a výsledný magnetický moment elementárních smyček je $\vec{m}_c$. Účinek těchto smyček můžeme nahradit ekvivalentní proudovou vrstvou s vázaným proudem I_v. Velikost vektoru magnetizace je rovna délkové hustotě tohoto vázaného proudu (j_v je hustota plošného vázaného proudu):

$$M = \frac{I_v}{h} = j_v \qquad I_v = \int_A^B \vec{M}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

57. Definice intenzity magnetického pole, jak souvisí s magnetickou susceptibilitou a permeabilitou v lineárním prostředí

    Podle Ampérova zákona platí vztah $\int_l \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I_0 + I_v)$. Jehož úpravou dostaneme:

$$\oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \mathrm{d}l$$

    Intenzita magnetického pole $\vec{H}$ je definována vztahem:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\,.$$

    V lineárním a izotropním prostředí je $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, kde χ_m je magnetická susceptibilita a platí:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}\,.$$

58. **Podmínky pro normálové složky pole $\vec{B}$, $\vec{H}$ na rozhraní dvou magnetik, vyznačit orientaci normály k rozhraní**

    Vztah mezi normálovými složkami odvodíme ze vztahu $\oiint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$. Určíme tok vektoru $\vec{B}$ povrchem nízkého válečku, jehož výška h limituje k nule tak, aby váleček stále obsahoval rozhraní. Odtud:

$$B_{n1} = B_{n2} \qquad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

59. **Podmínky pro tečné složky pole $\vec{B}$, $\vec{H}$ na rozhraní dvou magnetik, vyznačit orientaci normály k rozhraní**

    Vztah tečných složek odvodíme z Ampérova zákona $\oint_l \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = I$. Cirkulaci vektoru $\vec{H}$ provedeme po dráze c, kde h necháme limitovat k nule tak, že dráha bude stále obepínat rozhraní. Obepnutý proud proto musí být nulový.

$$H_{t1} = H_{t2} \qquad \frac{B_{t1}}{\mu_1} = \frac{B_{t2}}{\mu_2}$$

60. Energie magnetostatického pole buzeného $\vec{J}$, $\vec{K}$

$$W_m = \frac{1}{2}\iint\limits_S \oint_l \vec{J}\vec{A}\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{J}\vec{A}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iint\limits_S \vec{K}\vec{A}\,\mathrm{d}S$$

61. Energie magnetostatického pole vyjádřena pomocí vektorů pole

$$W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{B}\vec{H}\,\mathrm{d}V$$

62. **Energie nahromaděná v induktoru, energetická definice indukčnosti**

$$W = \int_0^\Phi i\,\mathrm{d}\Phi = \int_0^\Phi \frac{\Phi}{L}\,\mathrm{d}\Phi = \frac{\Phi^2}{2}L = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2}LI^2$$

63. Energie soustavy induktorů

    Mějme dvě cívky. První cívkou prochází magnetický tok Φ_A, druhou Φ_B. Energie pole obou cívek je dána vztahem

$$W = \frac{1}{2}\Phi_A I_1 + \frac{1}{2}\Phi_B I_2 = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 \pm M I_1 I_2\,.$$

64. **Jaké síly působí mezi dvěma paralelními vodiči protékanými stejným proudem ve stejném směru a opačnými směry**

Mezi dvěma rovnoběžnými vodiči se vzájemnou vzdáleností a působí síla:

$$\frac{F}{l} = BI = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \,.$$

Vodiče protékané proudy o stejném směru se přitahují. Na základě tohoto vztahu je definována jednotka proudu: proud o velikosti 1 A vyvolá mezi dvěma nekonečně dlouhými vodiči vzdálenými od sebe 1 m silové působení o velikosti $2 \cdot 10^{-7}$ N na 1 m délky vodiče.

65. **Hopkinsonův zákon a definice reluktance**

Hoplinsonův zákon vyjadřuje přímou úměrnost mezi magnetickým tokem a magnetomotorickým napětím:

$$U_m = NI = \Phi R_m \,.$$

Reluktance (magnetický odpor) je definována vztahem

$$R_m = \int_0^l \frac{\mathrm{d}l}{\mu S} \,.$$

66. Vyjádření vlastní a vzájemné indukčnosti cívek pomocí reluktance

Magnetický tok cívkou je určen vztahem $\Phi = NI/R_m$, což po dosazení do vztahu statické indukčnosti dá:

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2 I}{R_m I} = \frac{N^2}{R_m} \qquad M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

67. **Faradayův indukční zákon**

$$U_e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_c}{\mathrm{d}t} = \oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Velikost elektromotorického napětí U_e indukovaného ve vodivé smyčce je rovna rychlosti změny magnetického indukčního toku Φ_c procházející touto smyčkou.

68. **Dynamická definice vlastní a vzájemné indukčnosti**

Jestliže cívkou protéká časově proměnný proud $i(t)$, pak bude magnetický tok $\Phi(t)$ také časově proměnný. Po dozazení do definice statické indukčnosti $\Phi(t) = Li(t)$ a do Faradayova indukčního zákona bude platit:

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

69. **Jak transformuje ideální transformátor u, i, R**

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Je-li na sekundárním vinutí zátěž R_z jeví se tato zátěž z pohledu primárního vinutí jako efektivní zátěž o velikosti

$$R_{1ef} = \frac{u_1}{i_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_z.$$

70. Zápis okamžité hodnoty $\vec{E}$ pomocí fázoru, který definujte

Fázor je obecně komplexní veličina nezávisející na čase. Vyjádříme jej vztahem

$$\overset{\vartriangle}{E}(x, y, z) = \widehat{E}\vec{e}_0 = E_m e^{\mathrm{j}\varphi}\vec{e}_0 \,.$$

Máme-li veličinu měnící se s časem podle vztahu $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z) \sin \omega t$, vyjádříme ji pomocí fázoru vektoru

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \mathrm{Im}\,\{\overset{\vartriangle}{E}(x, y, z)e^{\mathrm{j}\omega t}\} \,.$$

71. Časová střední hodnota energie elektrického a magnetického pole zapsaná pomocí fázorů

$$S_{st} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\overset{\vartriangle}{E} \times \overset{\vartriangle}{H}{}^*\right\} = \frac{1}{2}E_m H_m \cos\varphi$$

72. Jaké je rozložení $\vec{B}$ v harmonicky podélně magnetovaném feromagnetickém plechu

Na povrchu plechu bude indukce maximální $\widehat{B}_m$. Tloušťka plechu je $2a$.

$$\widehat{B} = \widehat{B}_m \frac{\cos kx}{\cos ka} = \widehat{B}_m \frac{\cosh(1 + \mathrm{j})\beta x}{\cosh(1 + \mathrm{j})\beta a}$$

Na povrchu plechu je indukce maximální, směrem k rovině středního řezu klesá, uprostřed plechu je minimální.

73. Jaké je rozložení $\vec{J}$ ve vodiči kruhového průřezu protékaném harmonicky se měnícím proudem I

Nejsilnější je pole na vnějším povrchu, povrchový jev je tím výraznější, čím je f harmonického proudu vyšší (až v extrémním případě se feromagnetikum chová jako „trubka“).

74. Impedance vodiče při výrazném elektrickém povrchovém jevu, frekvenční závislost

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{1 + \mathrm{j}}{\sigma\delta} = (1 + \mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

Poznámka: $\delta = 1/\alpha$ – hloubka vniku, $\alpha = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$

75. **Rovnice kontinuity pro volné náboje a proudy v nestacionárním poli, diferenciální a integrální tvar**

Je-li nějaký objem zdrojem toku vektoru proudové hustoty $\vec{J}$, musí v něm existovat volný náboj Q a jeho hustota ρ se musí v čase měnit.

$$\oiint_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

76. Rovnice kontinuity pro polarizační proud a vázané náboje v nestacionárním poli

$$\mathrm{div}\,\vec{J}_p = -\frac{\partial\rho_v}{\partial t} \;\Rightarrow\; \mathrm{div}\,\vec{J}_p = \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{P}) \;\Rightarrow\; \vec{J}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

77. **První Maxwellova rovnice v nestacionárním poli v diferenciálním tvaru pro hmotné prostředí a obecnou časovou závislost, význam všech použitých symbolů**

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_p = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \,,$$

kde $\vec{J}$ je plošná hustota volného (kondukčního a konvekčního) proudu a $\vec{J}_p = \partial\vec{D}/\partial t$ je hustota polarizačního (posuvného) proudu.

78. **Druhá, třetí, čtvrtá Maxwellova rovnice v nestacionárním poli pro hmotné prostředí a obecnou časovou závislost, význam všech použitých symbolů**

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

79. **Čtyři Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru v nestacionárním poli, obecná časová závislost**

Ampérův-Mawellův zákon vyjadřuje souvislost mezi cirkulací magnetické indukce $\vec{B}$ podél uzavřené orientované křivky a časovou změnou toku elektrické intenzity $\oiint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}$ plochou ohraničenou touto křivkou a celkovm proudem procházejícím touto plochou.

$$\oint_l \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = I + I_p = I + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

Faradayův zákon vyjadřuje souvislost mezi cirkulací intenzity elektrického pole $\vec{E}$ podél uzavřené orientované křivky a časovou změnou indukčního magnetického toku $\Phi = \oiint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}$ plochou ohraničenou touto křivkou

$$\oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Gaussův zákon pro elektrostatické pole vyjadřuje souvislost mezi tokem intentzity elektrického pole $\vec{E}$ uzavřenou plochou a celkovým elektrickým nábojem uvnitř této plochy.

$$\oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q$$

Gaussův zákon pro magnetické pole vyjadřuje poznatek, že tok magnetiké indukce $\vec{B}$ libovolnou uzavřenou plochou je roven nule (tj. neexistuje magnetický náboj)

$$\oiint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

80. **Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru pro harmonicky proměnné nestacionární pole**

$$\mathrm{rot}\,\hat{\vec{H}} = \hat{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\hat{\vec{D}} = \sigma\hat{\vec{E}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\hat{\vec{E}} = (\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\,\hat{\vec{E}}$$

$$\mathrm{rot}\,\hat{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\hat{\vec{B}} = -\mathrm{j}\omega\mu\hat{\vec{H}}$$

$$\mathrm{div}\,\hat{\vec{D}} = \mathrm{div}\,\varepsilon\hat{\vec{E}} = \rho$$

$$\mathrm{div}\,\hat{\vec{B}} = \mathrm{div}\,\mu\hat{\vec{H}} = 0$$

81. **Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru pro harmonicky proměnné nestacionární pole**

$$\oint_l \hat{\vec{H}}\,\mathrm{d}\vec{l} = I + \mathrm{j}\omega\Psi$$

$$\oint_l \hat{\vec{E}}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\Phi$$

$$\oiint_S \hat{\vec{D}}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q$$

$$\oiint_S \hat{\vec{B}}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

82. **Podmínky na rozhraní dvou prostředí v nestacionárním poli pro tečné složky $\vec{E}$, $\vec{H}$**

Podmínky na rozhraní pro nestacionární pole jsou dány rovnicemi:

$$\mathrm{Rot}\ \vec{H} = \vec{K}, \quad \mathrm{Rot}\ \vec{E} = 0, \quad \mathrm{Div}\ \vec{D} = \sigma, \quad \mathrm{Div}\ \vec{B} = 0\,,$$

kde $\vec{K}$ je hustota plošného proudu a σ je plošná hustota volného náboje. Pro tečné složky platí:

$$H_{1t} - H_{2t} = K, \quad E_{1t} = E_{2t}\,.$$

83. **Podmínky na rozhraní dvou prostředí v nestacionárním poli pro normálové složky $\vec{E}$, $\vec{H}$**

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma, \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}\,.$$

84. **Energetická bilance elektromagnetického pole, obecná časová závislost, fyzikální význam jednotlivých členů**

Energetická bilance (Poyntingův teorém) v diferenciálním a integrálním tvaru:

$$-\mathrm{div}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{E}\vec{J} + \frac{\partial w}{\partial t} \qquad -\oiint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \vec{E}\vec{J}\,\mathrm{d}V + \frac{\partial W}{\partial t}$$

Levá strana udává energii, která za jednotku času teče plochou S do uvažovaného objemu; první člen na pravé straně vyjadřuje pohlcenou energii za jednotku času v objemu (Jouleovy ztráty), druhý člen je výkon zvyšující akumulovanou energii. Pro jednoduchost: energie, která se z daného objemu ztratí, se změní na teplo nebo se vyzáří.

85. **Poyntingův vektor, definice a zápis pomocí vektorů**

Poyntingův vektor vyjadřuje okamžitou hodnotu plošné hustoty výkonu. Směr vektoru $\vec{S}$, který je kolmý na $\vec{E}$ a $\vec{H}$, udává směr toku energie. Je definován jako

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

86. Energetická bilance činného výkonu

$$2P_s = \oiint_S \mathrm{Re}\left\{\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{H}}^*\right\} \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \sigma E_m^2\,\mathrm{d}V$$

87. Energetická bilance jalového výkonu

$$2Q_s = \oiint_S \mathrm{Im}\left\{\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{H}}^*\right\} \mathrm{d}\vec{S} = \omega \iiint_V \left(\varepsilon E_m^2 - \mu H_m^2\right)\,\mathrm{d}V$$

88. **Vlnová rovnice pro $\vec{E}$ nebo $\vec{H}$ v obecném prostředí mimo oblast zdrojů, obecná časová závislost**

$$\Delta\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\vec{H} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

89. **Vlnová rovnice pro $\vec{E}$ nebo $\vec{H}$ v obecném prostředí mimo oblast zdrojů, harmonické časové změny pole, zápis pomocí fázorů**

$$\Delta\hat{\vec{E}} - \mathrm{j}\omega\mu\sigma\hat{\vec{E}} + \omega^2\mu\varepsilon\hat{\vec{E}} = \Delta\hat{\vec{E}} - \mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)\hat{\vec{E}} = \Delta\hat{\vec{E}} + k^2\hat{\vec{E}} = 0$$

$$k = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)} = \beta - \mathrm{j}\alpha$$

90. Zápis $\vec{E}$ harmonicky proměnné postupné rovinné vlny v obecném prostředí a zápis její okamžité hodnoty, význam všech použitých symbolů

Pro rovinnou vlnu šířící se ve směru osy z má řešení tvar

$$\hat{E}(z) = \hat{K}_1 e^{\mathrm{j}kz} + \hat{K}_2 e^{-\mathrm{j}kz},$$

kde $\hat{K}_1$ a $\hat{K}_2$ jsou konstanty. Pro vlnu šířící se v kladném směru osy z je

$$\hat{E}(z) = \hat{E}_0 e^{-\mathrm{j}kz} = E_{0m} e^{\mathrm{j}\varphi_0} e^{-\mathrm{j}kz}, \qquad E(z,t) = E_{0m} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0).$$

91. Jaká je plocha konstantní amplitudy a plocha konstantní fáze u rovinné elektromagnetické vlny, co je uniformní a neuniformní vlna

Ploše vlny (geometrickému místu) s konstantní fází říkáme vlnoplocha. Uniformní vlna je vlnoplocha, která má navíc konstantní i amplitudu. Neuniformní vlna je vlnoplocha s proměnnou amlitudou.

92. Co je a jak je definována fázová rychlost

Fázová rychlost v_f je rychlost pohybu vlnoplochy (místa konstantní fáze). Je definována vztahem $v_f = \omega/\beta$. V bezeztrátovém prostředí je

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

93. Co je a jak je definována skupinová rychlost

Skupinová (grupová) rychlost je rychlost pohybu maxima energie vlny.

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\mathrm{d}(\beta v_f)}{\mathrm{d}\beta} = v_f + \beta \frac{\mathrm{d}v_f}{\mathrm{d}\beta}$$

94. Nakreslete orientaci $\vec{E}$, $\vec{H}$, k u rovinné vlny, jaký je vztah těchto tří vektorů, jaký typ vlny je rovinná vlna

Uvažujme vlnu šířící se ve směru osy z a souřadnou soustavu orientovanou tak, aby intenzita $\vec{E}$ měla jen složku ve směru osy x (E_x). Vektory $\vec{E}$, $\vec{H}$ a $\vec{z_0}$, kde $\vec{z_0}$ je směr šíření vlny, tvoří pravotočivý ortogonální systém. Mezi intenzitami platí vztah:

$$\widehat{H}_y = \frac{k}{\omega\mu} \widehat{E}_x \ \Rightarrow \ \widehat{E}_x = \widehat{Z} \widehat{H}_y.$$

95. Co je a jak je definována charakteristická impedance v obecném prostředí

Vlnová impedance prostředí je pro neohraničené prostředí definována vztahem

$$\widehat{Z} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma}}.$$

96. Čemu se rovná k, v_f a Z v ideálním dielektriku

V ideálním dielektriku je $\sigma = 0$ a proto nedochází ke ztrátám. Měrný útlum je nulový a konstanta šíření reálná:

$$k = \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad \alpha = 0, \quad v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (\omega\varepsilon \gg \sigma), \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,\Omega \text{ (ve vakuu)}$$

97. Čemu se rovná k, v_f a Z v dobrém vodiči

V dobrém vodiči je $\omega\varepsilon \ll \sigma$. Konstantu šíření můžeme aproximovat $k^2 = -\mathrm{j}\omega\mu\sigma$:

$$k = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\sigma}, \quad \beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \quad v_f = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \quad Z = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{\mathrm{j}\pi/4} \quad (\omega\varepsilon \ll \sigma)$$

98. Co je a jak je definována hloubka vniku

Ekvivalentní hloubka vniku je vzdálenost, kterou musí vlna urazit, aby její amplituda klesla na e^{-1} násobek (37 %) původní hodnoty. Je definována jako převrácená hodnota měrného útlumu:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

99. Činný výkon přenášený rovinnou vlnou plochou 1 m^2 obecně a zvláště ve vakuu

Činný výkon procházející jednotkovou plochou je roven střední hodnotě Poyntingova vektoru:

$$\vec{S}_{st} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\hat{E} \times \hat{H}^*\right\} = \frac{1}{2}E_m H_m \cos\varphi \vec{z}_0 = \frac{1}{2}\frac{E_m^2}{|Z|}\cos\varphi\vec{z}_0 = \frac{1}{2}|Z| H_m^2 \cos\varphi \vec{z}_0 \,.$$

Ve ztrátovém prostředí závisí amplitudy intenzit na souřadnici z:

$$\vec{E}_m(z) = E_m(0)e^{-\alpha z}, \quad H_m(z) = H_m(0)e^{-\alpha z} \;\Rightarrow\; \vec{S}_{st}(z) = \vec{S}_{st}(0)e^{-2\alpha z}\,.$$

Ve vakuu je $\varphi = 0$ a $Z_0 = 376,73 = 120\pi\ \Omega$:

$$\vec{S}_{st} = \frac{E_m^2}{240\pi}\vec{z}_0 = 60\pi H_m^2 \vec{z}_0$$

100. Co je a jaké jsou typy polarizace elektromagnetické vlny

Je to způsob pohybu koncového bodu vektoru $\vec{E}$ v příčné rovině. Druhy polarizace jsou — lineárně polarizovatelná (vertikální, horizontální), kruhově polarizovatelná (levotočivě, pravotočivě), elipticky polarizovatelná.

101. Za jakých podmínek dvě lineárně polarizované vlny vytvoří vlnu lineárně, kruhově a elipticky polarizovanou

Superpozicí dvou lineárně polarizovaných vln vznikne lineárně polarizovaná vlna tehdy, budou-li vektory intenzit (např. $\vec{E}$) rovnoběžné nebo ve fázi. Kruhově polarizovaná vlna vznikne superpozicí dvou vln stejné ampitudy s navzájem kolmými vektory $\vec{E}$ a s fázovým posunem $\pi/2$. V ostatních případech vznikne elipticky polarizovaná vlna.

102. Telegrafní rovnice pro harmonicky v čase proměnné u nebo i v případě dvouvodičového vedení, na kterém se šíří vlna TEM, význam všech použitých symbolů

Základní rovnice pro u a i:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

Vlnová rovnice pro napětí:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial u}{\partial t} + RGu$$

Vlnová rovnice pro proud má stejný tvar. R je odpor, L indukčnost, C kapacita a G svod vedení na jednotku délky. Vlnová rovnice pro napětí pro harmonický ustálený stav má tvar

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial x^2} = (R + \mathrm{j}\omega L)(G + \mathrm{j}\omega C)\widehat{U} = \widehat{Z}_l \widehat{Y}_q \widehat{U} \Rightarrow \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial x^2} + k^2\widehat{U} = 0\,.$$

Konstanta $k = \alpha - \mathrm{j}\beta$ je konstanta šíření (vlnové číslo), α je fázová konstanta (měrný posun) a β je měrný útlum. $\widehat{Z}_l$ je podélná impedance a $\widehat{Y}_q$ je příčná admitance vedení na jednotku délky.

103. Zápis řešení telegrafní rovnice pomocí fázorů, význam všech použitých symbolů

Mějme vedení délky l s charakteristickou (vlnovou) impedancí $\widehat{Z}_0$. Označme s vzdálenost od konce vedení a $\widehat{U}_2$, $\widehat{I}_2$ poměry na konci vedení. Pak platí:

$$\widehat{U}(s) = \widehat{U}_2 \cos ks + \widehat{Z}_0 \widehat{I}_2 \sin ks$$

$$\widehat{I}(s) = \frac{\widehat{U}_2}{\widehat{Z}_0} \sin ks + \widehat{I}_2 \cos ks$$

104. Impedance vedení s rozprostřenými parametry v závislosti na poloze

Označme $\widehat{Z}_s$ impedanci na konci vedení: $\widehat{Z}_s = \widehat{U}_2/\widehat{I}_2$. Vztah pro impedanci je

$$\widehat{Z}(s) = \frac{\widehat{U}(s)}{\widehat{I}(s)} = \frac{\widehat{U}_2 \cos ks + \widehat{Z}_0 \widehat{I}_2 \sin ks}{\frac{\widehat{U}_2}{\widehat{Z}_0} \sin ks + \widehat{I}_2 \cos ks} = \widehat{Z}_0 \frac{\widehat{Z}_s + \widehat{Z}_0 \operatorname{tg} ks}{\widehat{Z}_0 + \widehat{Z}_s \operatorname{tg} ks}\,.$$

105. Charakteristická impedance vedení s vlnou TEM u reálného a bezeztrátového vedení

Charakteristická (vlnová) impedance se spočítá podle vztahu:

$$\widehat{Z}_0 = \sqrt{\frac{\widehat{Z}_l}{\widehat{Y}_q}} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{G + \mathrm{j}\omega C}}\,,$$

kde $\widehat{Z}_l$ je podélná impedance a $\widehat{Y}_q$ příčná admitance na jednotku délky vedení. U bezeztrátového vedení je odpor R a svod G nulový a platí:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

106. Vstupní impedance reálného a bezeztrátového vedení s vlnou TEM délky l a zakončeného impedancí Z_s

$$\widehat{Z}_v = \widehat{Z}(l) = \widehat{Z}_0 \frac{\widehat{Z}_s + \widehat{Z}_0 \operatorname{tg} kl}{\widehat{Z}_0 + \widehat{Z}_s \operatorname{tg} kl}$$

107. Vstupní impedance bezeztrátového vedení s vlnou TEM délky l na konci zkratovaného a otevřeného

$$Z_k = \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{tg} \beta l \qquad Z_p = \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{cotg} \beta l$$

Abecední seznam otázek