1. Stanovení modulu pružnosti v tahu přímou metodou

1.1. Zadání úlohy

1. Určite modul pružnosti v tahu přímou metodou pro dva vzorky různých materiálů a výsledky porovnejte s tabulkovými hodnotami.

2. Z naměřených hodnot určete chybu měření.

1.2. Teoretický rozbor

Napínáme-li drát nebo tyč délky l a průřezu S do meze úměrnosti materiálu silou F ve směru jeho osy, pak pro jeho prodloužení $\triangle l$ platí:

$$\triangle l = kl\frac{F}{S}$$

Konstantu k nahradíme její převrácenou hodnotou:

$$E = \frac{1}{k}$$

Konstanta E se nazývá *modul pružnosti v tahu* (Youngův modul pružnosti). Je to konstanta, která vyjadřuje pružnost materiálu při namáhání v tahu. Číselná hodnota modulu pružnosti v tahu je rovna velikosti napětí, které by danou délku prodloužilo na dvojnásobek původní délky. Normálové napětí je definováno jako síla velikosti F působící kolmo na jednotku plochy

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

úpravami dostaneme

$$\frac{\triangle l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \varepsilon,$$

kde ε je relativní prodloužení. Předchozí rovnice vyjadřuje tzv. *Hookův zákon.* Relativní prodloužení je přímo úměrné normálovému napětí, pokud namáhání nepřekročí mez úměrnosti.

Pro stanovení modulu pružnosti v tahu materiálu E z něhož je zhotoven drát, použijeme rovnici:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{S} \cdot \frac{l}{\triangle l}$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o velmi malé délkové změny, provedeme zjištění velikosti prodloužení materiálu při namáhání v tahu zrcátkovou metodou.

Měření zrcátkovou metodou provádíme tak, že měřený drát o délce l a průměru d je napínán závažím o hmotnosti m, zavěšeným na konci páky P o délce q. Vzdálenost uchycení drátu od osy otáčení O je p. Drát je napínán momentem $M = Fg$.

Na ose otáčení páky P je umístěno zrcátko Z, ve kterém se odráží stupnice S. Odraženou stupnici v zrcátku pozorujeme dalekohledem D. Zvětšení závaží na konci páky P o hodnotu G způsobí prodloužení drátu o l a v důsledku toho se rovinné zrcátko Z otočí o úhel . Otočí-li se rovinné zrcadlo o úhel, otočí se odražený paprsek o úhel dvojnásobný (na základě zákonů optiky).

Pootočení zrcadla Z se projeví v dalekohledu tím, že místo dílku n_0, který byl při nezatíženém drátě ve středu nitkového kříže dalekohledu, posune se do středu nitkového kříže dílek n. Za předpokladu, že prodloužení je značně menší, než délka drátu l a vzdálenost zrcátka od stupnice a, můžeme pro určení úhlu použít rovnici:

$$\mathrm{tg}\ 2\varphi \cong 2\varphi = \frac{\triangle n}{a} \Longrightarrow \varphi = \frac{\triangle n}{2a},$$

kde $n = n - n_0$ je dílková změna. Prodlouží-li se drát o $\triangle l$, pootočí se páka P o úhel φ a dle obrázku 1 platí pro úhel φ rovnice:

$$\text{tg } \varphi \cong \varphi = \frac{\triangle l}{p}$$

Úhel, který určují předchozí dvě rovnice je stejný a pro relativní prodloužení ε dostaneme:

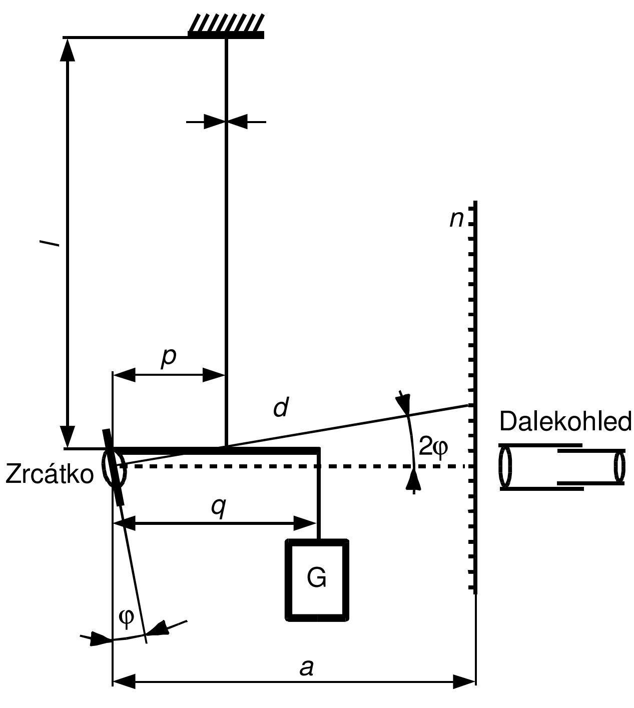
$$\varepsilon = \frac{\triangle l}{l} = \frac{p\triangle n}{2al}$$

Dosadíme-li do rovnice za relativní prodloužení $p\triangle n/2al$, a položíme-li $F = qG/p$ a $S = \pi d^2/4$ dostaneme pro modul pružnosti v tahu E rovnici:

$$E = \frac{8alq}{\pi d^2 p^2} \frac{G}{\triangle n}$$

Prakticky je velmi obtížné stanovit délku nezatíženého drátu, a proto volíme ke zpracování postupnou vyrovnávací metodu. Do rovnice předeělé dosadíme za G, $\sum_i G_i$ (součet všech zatížení) a za $\triangle n$ dosadíme součet všech dílkových změn a dostaneme rovnici:

$$E = \frac{8alq}{\pi d^2 p^2} \frac{\sum\limits_i G_i}{\sum\limits_i \triangle n_i}$$



Obrázek 1: Schéma měřícího zařízení

1.3. Postup měření

1. Změříme délku drátu kovovým měřítkem při základním zatížení.

2. Posuvkou změříme délku páky q a vzdálenost upevnění drátu q na páce P od osy otáčení O.

3. Změříme průměr drátu mikrometrem na různých místech, abychom si ověřili konstantní průměr.

4. Podle materiálu a průměru drátu zvolíme velikost závaží – pro slabší drát sadu půlkilových a pro silnější drát sadu kilových závaží.

5. Čteme nulovou polohu n_0 a další výchylky pro různá zatížení, postupující po jednotlivých závažích m, do nejvyššího zatížení a zase zpět do úplného odlehčení drátu (až na původní závaží, kterému příslušejí nulové polohy n_0‘ a n_0“ a které do součtu $\sum_i \triangle n_i$ nepočítáme).

1.3.1. Použité měřící přístroje

- Dalekohled Meopta
- Pásové měřítko (chyba 1 mm)
- Posuvné měřítko (chyba 0,02 mm)
- Mikrometr (0,001 mm)

1.4. Naměřené hodnoty

1.4.1. Bronz

Průměr drátu

d_i	1	2	3	4	5	6	7	8
[mm]	0,89	0,88	0,88	0,89	0,89	0,95	0,91	0,91
d_i	9	10	11	12	13	14	15	$1/n \sum_i d_i$
[mm]	0,89	0,89	0,90	0,89	0,89	0,89	0,90	**0,897**

Měření různých zatížení

- Délka nezatíženého drátu: $l = 1000$ mm
- Vzdálenost uchycení drátu od osy otáčení: $p = 49{,}64$ mm
- Délka páky: $q = 107,0$ mm
- Vzdálenost zrcátka od stupnice: $a = 1000$ mm

Počet závaží	G_i [N]	n_i' [–]	n_i'' [–]	$n_i = \frac{n_i'+n_i''}{2}$ [–]	$n_i - n_0$ [–]	E_i [Pa]
0	0,00	333	336	334,5	0,0	—
1	9,82	351	352	351,5	17,0	$7{,}940 \cdot 10^{10}$
2	19,63	366	367	366,5	32,0	$8{,}437 \cdot 10^{10}$
3	29,45	379	380	379,5	45,0	$8{,}999 \cdot 10^{10}$
4	39,26	393	393	393,0	58,5	$9{,}230 \cdot 10^{10}$
5	49,08	405	405	405,0	70,5	$9{,}573 \cdot 10^{10}$
$\sum_i G_i$	147,33			$\sum_i (n_i - n_0)$	223,0	

Výpočet modulu pružnosti

$$E = \frac{8alq}{\pi d^2 p^2} \frac{\sum\limits_i G_i}{\sum\limits_i \triangle n_i} = \frac{8 \cdot 1{,}000 \cdot 1{,}000 \cdot 0{,}107}{\pi \cdot (0{,}897 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}04964^2} \cdot \frac{147{,}23}{0{,}223} \doteq 9{,}080 \cdot 10^{10}\mathrm{Pa}$$

Odhad chyby měření

$$\bar{\vartheta}(\bar{E}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\triangle E_i)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{30}1{,}985 \cdot 10^{20}} \doteq 1{,}715 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

1.4.2. Ocel

Průměr drátu

d_i	1	2	3	4	5	6	7	8
[mm]	0,71	0,705	0,70	0,70	0,70	0,705	0,705	0,71
d_i	9	10	11	12	13	14	15	$1/n \sum_i d_i$
[mm]	0,71	0,715	0,70	0,71	0,70	0,705	0,70	**0,705**

Měření různých zatížení

- Délka nezatíženého drátu: $l = 1004$ mm
- Vzdálenost uchycení drátu od osy otáčení: $p = 49{,}41$ mm
- Délka páky: $q = 99,02$ mm
- Vzdálenost zrcátka od stupnice: $a = 1013$ mm

Počet závaží	G_i	n_i'	n_i''	$n_i = \frac{n_i'+n_i''}{2}$	$n_i - n_0$	E_i
	[N]	[–]	[–]	[–]	[–]	[Pa]
0	0,00	287	289	288,0	0,0	—
1	4,91	301	303	302,0	14,0	$7{,}409 \cdot 10^{10}$
2	9,82	311	313	312,0	24,0	$8{,}643 \cdot 10^{10}$
3	14,72	320	321	320,5	32,5	$9{,}574 \cdot 10^{10}$
4	19,63	327	328	327,5	39,5	$1{,}050 \cdot 10^{11}$
5	24,54	334	334	334,0	46,0	$1{,}127 \cdot 10^{11}$
$\sum_i G_i$	73,61			$\sum_i (n_i - n_0)$	156,0	

Výpočet modulu pružnosti

$$E = \frac{8alq}{\pi d^2 p^2}\frac{\sum\limits_i G_i}{\sum\limits_i \triangle n_i} = \frac{8 \cdot 1{,}013 \cdot 1{,}004 \cdot 0{,}9902}{\pi \cdot (0{,}705 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}04941^2} \cdot \frac{73{,}61}{0{,}156} \doteq 9{,}973 \cdot 10^{10}\text{Pa}$$

Odhad chyby měření

$$\bar{\vartheta}(\bar{E}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\triangle E_i)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{30}1{,}048 \cdot 10^{21}} \doteq 3{,}940 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

1.5. Závěr

Stanovené moduly roztažnosti:

- Bronz – $E = (90{,}8 \pm 1{,}7) \cdot 10^9$ Pa. Tato hodnota se blíží tabulkové hodnotě při normální pokojové teplotě, která je stanovena v rozsahu 97–102$\cdot 10^9$ Pa. Naměřený modul E se liší v rozmezí 6,4–11 %.
- Ocel – $E = (99{,}7 \pm 3{,}9) \cdot 10^9$ Pa. Tato hodnotna se od tabulkové, která činí $210 \cdot 10^9$ Pa, značně odlišuje a to o více než 50 %.

1.6. Kontrolní otázky

- Jak zní Hookův zákon?

  Deformace je úměrná napětí materiálu.

- Co reprezentuje deformační křivka a pro kterou část této křivky platí Hookův zákon?

  Deformační křivka je grafické znázornění závislosti napětí σ na tenzoru malých deformací ε. Hookův zákon platí jen na lineární části křivky, tj. od počátku po mez úměrnosti.

- Jak zní zobecněný Hookův zákon pro izotropní kontinuum?

  Zobecněný Hookův zákon v izotrovním kontinuu (pružném tělese) zní

  $$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu \varepsilon_{ij} \ ,$$

  kde δ_{ij} je tzv. *Kroneckerův symbol (jednotkový tenzor)* a je definován tak, že je roven jedné, jsou-li oba indexy stejné $i = j$, a nule, jsou-li různé $i \neq j$. Koeficienty λ, μ se nazývají *Laméovy koeficienty*, přičemž λ vyjadřuje změnu objemu a koeficient μ, též označovaný jako G, je *modul smyku.*

- Co jsou síly plošné a objemové?

  Síly vyvolávající deformaci tělesa mohou být plošné nebo objemové. Objemové síly působí současně na všechny elementy objemu tělesa, pronikají celým tělesem (např. síla tíhová, odstředivá). Plošné síly působí na povrch tělesa. Působí-li síla ve směru normály k ploše, vyvolává tah nebo tlak, působí-li tečně, vyvolává smyk.

- Co představuje Poissonova konstanta?

  Poissonova konstanta má tvar

  $$k = \left| \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \right|$$

  a vyjadřuje proměr zúžení a prodloužení tyče.