0. Měření objemu přímou metodou

0.1. Úkol měření

1. Změřte objem hranolu a válce přímou metodou.
2. Vypočítejte z naměřených hodnot pravděpodobnou chybu jednotlivých rozměrů zkoumaného tělesa.
3. Vypočítejte pravděpodobnou chybu měření objemu tělesa.

0.2. Teoretický rozbor

Cílem úlohy je naučit se vyhodnocovat naměřené fyzikální veličiny, určovat jejich chyby a stanovit celkovou chybu výsledku. K tomu je vhodné měření objemu pravidelných těles, jejichž charakteristické rozměry jsou částečně minimálně deformovány.

V případě této úlohy byl pro měření zvolen hranol a válec. Objem válce je dán rovnicí

$$V = \pi R^2 h = f(R, h) \ ,$$

kde R je poloměr podstavy a h je jeho výška. Objem hranolu se spočte podle vztahu

$$V = abc = f(a, b, c) \ ,$$

kde a, b, c jsou délky jednotlivých stran hranolu.

Je-li výsledná fyzikální veličina zadána jako funkce několika veličin x, y, z, … rovnicí

$$V = f(x, y, z, \ldots) \ ,$$

potom pravděpodobnou chybu výsledku měření vypočteme z rovnice

$$\vartheta(x, y, z, \ldots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \vartheta^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \vartheta^2(y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \vartheta^2(z) + \ldots} \ ,$$

kde $\vartheta(x)$, $\vartheta(y)$, $\vartheta(z)$,… jsou pravděpodobné chyby veličin x, y, z,… a výrazy $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \vartheta^2(x)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \vartheta^2(y)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \vartheta^2(z)$ jsou první parciální derivace funkce $f(x, y, z, ...)$.

V našem případě dostaneme pro pravděpodobnou chybu měření objemu válce vztah

$$\overline{\vartheta}(\overline{V}) = \sqrt{\pi^2 \overline{R}^4 \overline{\vartheta}^2(h) + 4\pi^2 \overline{R}^2 \overline{h}^2 \overline{\vartheta}^2(\overline{R})} \ ,$$

kde $\overline{\vartheta}(\overline{R})$ je pravděpodobná chyba měření průměru válce, $\overline{\vartheta}(\overline{h})$ je pravděpodobná chyba měření výšky válce.

Pro pravděpodobnou chybu objemu hranolu platí vztah

$$\overline{\vartheta}(\overline{V}) = \sqrt{(\overline{b}\overline{c})^2 \overline{\vartheta}^2(\overline{a}) + (\overline{a}\overline{c})^2 \overline{\vartheta}^2(\overline{b}) + (\overline{a}\overline{b})^2 \overline{\vartheta}^2(\overline{c})},$$

kde $\overline{\vartheta}(\overline{a})$, $\overline{\vartheta}(\overline{b})$, $\overline{\vartheta}(\overline{c})$ jsou pravděpodobné chyby měření stran a, b, c.

K určení pravděpodobné chyby měření jedné veličiny (R, h, a, b, c) je třeba stanovit průměrnou hodnotu veličiny z dostatečného počtu měření podle vztahu

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

kde n je počet měření veličiny x. Dále je nezbytné určit odchylku $\triangle x_i$ všech naměřených hodnot od hodnoty průměrné podle vztahu $\triangle x_i = x_i - \overline{x}$.

Pravděpodobná chyba $\vartheta(x)$ se poté stanoví z odchylek od aritmetického průměru pomocí vztahu

$$\overline{\vartheta}(\overline{x}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\triangle x_i)^2} \ .$$

0.3. Postup měření

Nejprve změříme pomocí posuvky a mikrometru deset hodnot pro každou veličinu nezbytnou pro stanovení objemu daného válce a hranolu. Poté stanovíme aritmetický průměr pro každou z měřených veličin a odchylky od tohoto průměru pro každé měření. Tyto hodnoty vyneseme do tabulky. Následně z těchto hodnot stanovíme pravděpodobnou chybu měření objemů obou těles.

0.4. Použité přístroje

- Posuvné měřítko

0.5. Naměřené a vypočtené hodnoty

i	a_i [mm]	b_i [mm]	c_i [mm]	$\triangle a_i$ [mm]	$\triangle b_i$ [mm]	$\triangle c_i$ [mm]
1.	28,50	32,92	11,50	0,43	−0,57	0,166
2.	28,40	32,86	11,30	0,33	−0,63	−0,034
3.	28,30	32,84	11,26	0,23	−0,65	−0,074
4.	28,20	32,84	11,28	0,13	−0,65	−0,054
5.	28,18	32,90	11,24	0,11	−0,59	−0,094
6.	28,10	32,88	11,38	0,03	−0,61	0,046
7.	27,78	32,94	11,42	−0,29	−0,55	0,086
8.	27,82	32,90	11,28	−0,25	−0,59	−0,054
9.	27,62	32,90	11,20	−0,45	−0,59	−0,134
10.	27,80	32,92	11,48	−0,27	−0,57	0,146

0.5.1. Vypočtené hodnoty

- $\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} a_i = 28{,}07$ mm
- $\overline{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} b_i = 32{,}89$ mm
- $\overline{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} c_i \doteq 11{,}33$ mm
- $\overline{\vartheta}(\overline{a}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\triangle a_i^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{90}\cdot 0{,}795} \doteq 0,063$ mm
- $\overline{\vartheta}(\overline{b}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\triangle b_i^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{90}\cdot 3{,}611} \doteq 0,136$ mm
- $\overline{\vartheta}(\overline{c}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\triangle c_i^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{90}\cdot 0{,}098} \doteq 0,022$ mm

Pravděpodobná chyba objemu hranolu

$$\overline{\vartheta}(\overline{V}) = \sqrt{(\overline{b}\overline{c})^2\overline{\vartheta}^2(\overline{a}) + (\overline{a}\overline{c})^2\overline{\vartheta}^2(\overline{b}) + (\overline{a}\overline{b})^2\overline{\vartheta}^2(\overline{c})} = \sqrt{372{,}64^2\cdot 0{,}063^2 + 318{,}03^2\cdot 0{,}136^2 + 923{,}22^2\cdot 0{,}022^2}$$

$$\overline{\vartheta}(\overline{V}) \doteq 53 \text{ mm}^3$$

0.6. Závěr

Objem hranolu V vzorku č. 8 určený měřením je (10463 ± 53) mm^3.

0.7. Kontrolní otázky

1. Odvoďte výrazy pro relativní chybu měření objemu válce a hranolu.

   Relativní chyba je poměr chyby absolutní k měřené veličině.

   - Relativní chyba objemu pro hranol

$$\delta_r = \frac{\overline{\delta}(\overline{V})}{V} \cdot 100 = \frac{1}{V}\sqrt{(\overline{b}\overline{c})^2\overline{\vartheta}^2(\overline{a}) + (\overline{a}\overline{c})^2\overline{\vartheta}^2(\overline{b}) + (\overline{a}\overline{b})^2\overline{\vartheta}^2(\overline{c})} \cdot 100 = \frac{53}{10463} \cdot 100 \doteq 0{,}51\ \%$$

   - Relativní chyba objemu pro válec

$$\delta_r = \frac{\overline{\delta}(\overline{V})}{V} \cdot 100 = \frac{1}{V}\sqrt{\pi^2\overline{R}^4\overline{\vartheta}^2(h) + 4\pi^2\overline{R}^2\overline{h}^2\overline{\vartheta}^2(\overline{R})} \cdot 100$$

2. Závisí přesnost měření pouze na násobnosti opakování měření téže veličiny?

   Opakováním měření lze výsledek zpřesnit, odstraní se nahodilé chyby. Bohužel výsledek je stále zatížen chybami měření, např. systematickou chybou přístroje.

3. Lze dosáhnout libovolné přesnosti měřené veličiny?

   Nelze. Když libovolné přesnosti, tak by se mělo dosáhnout i úplné přesnosti a to prostě nejde.

4. Jak je definována krajní chyba výsledku?

   Krajní chyba výsledku (aritmetického průměru) $\overline{\kappa}$ je definovaná jako trojnásobek střední kvadratické chyby aritmetického průměru $\overline{s}$

$$\overline{\kappa} = 3\overline{s} = 3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\triangle x_i)^2}{n(n-1)}}\ .$$

   Statisticky více než 99,5 % naměřených hodnot spadá do rozmezí ohraničeného touto krajní chybou.